This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909175 3

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE,

PAR CLAIRAUT;

DERNIÈRE ÉDITION,

Enrichie de Notes et d'Additions par le C. THEVENEAU, ancien Professeur des Gardes de la Marine.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez EMERY, imprimeur-libraire, rue du Foin-Saint-Jacques, n°. 295.

AN IX. = 1801.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R L

PRÉFACE
DE L'AUTEUR.

Je me suis proposé de suivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Élémens de Géométrie : j'ai tâché d'y donner les règles de l'Algèbre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorêmes. Toutes, au contraire, semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problêmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

Des Problêmes utiles au commerce, comme ceux où il est question de partager des sommes entre différentes personnes, à raison de leurs mises ou de quelques conventions faites entr'elles; des règles d'alliage, etc., sont les Problêmes que je suppose avoir occupé les premiers Algébristes.

Je commence par donner la solution d'un des plus simples de ces Problêmes, telle qu'on la peut trouver, sans avoir aucune teinture de l'Algèbre. Il est aisé de reconnoître dans cette solution, que si la mémoire

suffit à retenir tous les raisonnemens par lesquels il faut passer pour y arriver, c'est que la suite de ces raisonnemens n'est pas bien longue; et l'on voit en même-tems, que, lorsqu'on s'élève à des Problêmes qui en demandent une plus grande, il faut chercher à les écrire d'une manière fort abrégée, il faut imaginer quelques signes, à l'aide desquels on puisse exprimer l'état où la difficulté est réduite à chaque pas qu'on fait pour la résoudre. Cette manière d'écrire les questions, est l'Algèbre que je fais, pour ainsi dire, inventer au Lecteur.

Pour aller toujours du plus simple au plus composé, je ne propose d'abord que des questions numériques, parce que ce sont celles qui fixent le plus l'esprit des Commençans. Après en avoir résolu plusieurs, qui ne diffèrent les unes des autres que par les nombres donnés dans l'énoncé, on s'apperçoit aisément qu'il y a toujours une partie de l'opération qui se trouve commune dans chaque résolution, et qu'il seroit à souhaiter de ne faire qu'une seule fois: je saisis cette occasion d'expliquer la manière de résoudre généralement les Problêmes, en employant,

au lieu des nombres donnés par les conditions, des lettres qui expriment toutes sortes de grandeurs : et j'enseigne ensuite à tirer des solutions générales les solutions particulières, au moyen de la substitution des nombres à la place des lettres.

Parmi les différens Problêmes où j'emploie des lettres au lieu de nombres, il s'en trouve d'assez compliqués pour ne pouvoir pas être résolus sans employer les règles d'addition, soustraction, multiplication et division : je montre alors comment on doit faire ces opérations. Je n'ai pas cru devoir les donner plutôt, parce que les Commençans les suivent avec peine et avec dégoût, lorsqu'on les leur enseigne dans un tems où ils n'ont aucune idée des quantités sur lesquelles ils opèrent.

La multiplication est de toutes ces opérations celle qui arrête ordinairement le plus les Commençans, et dont l'explication embarrasse le plus les Maîtres : ce principe qu'elle renferme, que deux quantités négatives donnent pour leur produit une quantité positive, est presque toujours l'écueil des uns et des autres.

négatives; par ce moyen, j'arrive au résultat, sans employer d'autres raisonnemens, que ceux sur lesquels on ne peut former aucun doute; et je vois ce que doivent être ces produits ou quotiens des quantités négatives que m'avoit donnés la première solution. Il n'est pas difficile ensuite d'en tirer ces principes si fameux que *moins* par *moins* donne *plus*, etc.

Je délivre ainsi ces principes de tout ce qu'ils ont de choquant, et le Lecteur parvient en même-tems à connoître la nature des solutions négatives des Problêmes; il apprend cette vérité si utile, que lorsque dans une solution on arrive à trouver l'inconnue négative, elle doit être prise dans un sens opposé à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problême.

La première partie de cet Ouvrage traite uniquement des équations du premier degré, soit à une, soit à plusieurs inconnues, et de toutes les opérations que demandent ces équations, tant pour arriver à leur résolution, que pour la rendre aussi simple qu'elle puisse être. Telle est, par exemple,

la règle qu'il faut suivre pour trouver le plus grand commun diviseur, laquelle naît de la nécessité de réduire une fraction à sa plus simple expression. Cette règle est expliquée d'une manière nouvelle, et j'y ai ajouté plusieurs réflexions qui la rendent appliquable à des cas où la manière ordinaire de la traiter, pourroit rebuter, pour la longueur des calculs, et ne pas toujours donner la quantité qu'on cherche.

Dans la seconde partie, je parle des équations du second degré; un Problème où il s'agit d'intérêts-d'intérêts m'amène à une de ces équations; je l'ai choisie de manière à donner pour ses deux solutions deux nombres positifs, afin de mieux faire voir comment deux nombres différens résolvent le même Problême. J'en ai usé ainsi, dans la crainte que les Commençans, qui ne regardent pas volontiers les racines négatives, comme de véritables solutions, ne crussent que le Problême n'avoit réellement qu'une solution.

Cependant, afin de les accoutumer aux racines négatives, je donne ensuite un Problême dans lequel il y a une de ces racines;

et telle cependant qu'aucun Commençant ne peut s'empêcher de voir qu'elle satisfait autant au Problême que la positive.

La résolution des équations que demandent ces Problêmes et ceux de même espèce qu'on peut se proposer, engagent les Lecteurs à apprendre plusieurs opérations essentielles de l'Algèbre ; telles que les extractions des racines quarrées, la réduction des radicaux, leurs additions, soustractions, etc. ; opérations qu'on donne d'ordinaire au commencement des Élémens d'Algèbre, mais que mon plan exigeoit de placer en ce lieu.

De ces opérations, je passe à un Problême dans lequel on doit employer plusieurs équations du second degré, qui contiennent chacune plusieurs inconnues ; et je donne les moyens de réduire toutes ces équations à une seule qui ne renferme qu'une inconnue. Je fais voir en même-tems que cette méthode n'est pas seulement propre aux équations où les inconnues ne montent qu'au second degré, mais qu'elle s'étend à tous les degrés.

La troisième partie a pour objet les équations de tous les degrés pris en général.

Je traite du nombre de leurs racines, des propriétés que les coefficiens du second, du troisième, etc. terme, ont d'être, ou la somme des racines, ou celle des produits de ces racines, etc. Je tire de ces propriétés la fameuse règle de Descartes, pour trouver toutes les racines commensurables qui sont dans une équation; et comme cette méthode engage dans des calculs excessifs, à cause du grand nombre de divisions qu'il faut tenter, je donne la méthode de Newton, qui s'étend non-seulement aux racines commensurables ou diviseurs d'une dimension, mais aux diviseurs de tant de dimensions que l'on veut. Je ne me contente pas de donner la démonstration de cette méthode, que Newton avoit supprimée, mais je fais voir par quelle route il a pu la découvrir. C'est un avantage que je ne crois pas qu'on puisse trouver dans la démonstration que M. s'Gravesande en a donnée (dans son *Specimen commentarii in arithmeticam universalem*, inséré à la fin de ses Élémens d'Algèbre), et qui est la seule que je sache avoir été donnée; malgré le grand nombre de Traités d'Algèbre qui ont paru

depuis Newton. J'ai appris cependant que le R. P. Jacquier, connu pour avoir commenté les recherches les plus élevées de Newton, avoit pris la peine de traiter celle-ci, mais ce qu'il a fait sur cette matière, n'est pas venu à ma connoissance.

Au reste, dans cette partie et dans celles qui suivent, je ne m'arrête pas, comme dans les deux précédentes, à montrer les Problêmes qui pourroient avoir conduit aux équations que j'examine, parce que je ne crois plus avoir besoin de ce motif pour exciter la curiosité des Lecteurs. Ils ont dû suffisamment voir par les premiers Problêmes, de quelle importance il étoit de savoir résoudre toutes sortes d'équations.

Je traite dans la quatrième partie, des équations de tous les degrés, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles se réduisent à la méthode des équations du second degré, par une simple transformation. J'enseigne, par ce moyen, aux Commençans, un grand nombre d'opérations sur les quantités radicales de toute espèce, et je leur donne une connoissance entière, tant de l'élévation des puissances, que de l'extraction des racines.

Une règle qui est absolument nécessaire pour la résolution complette de ces équations, et qui a toujours été omise dans tous les Ouvrages Élémentaires, (celui de M. s'Gravesande excepté) c'est l'extraction des racines des quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables : Newton, à qui on doit cette règle, l'ayant donné à son ordinaire sans démonstration, je l'ai traitée ici comme un Problême; par ce moyen la découverte et la démonstration marchent toujours de concert.

La méthode de Newton s'étend aux quantités numériques, quelque soit l'exposant de la racine, mais elle ne s'applique pas aux quantités littérales, lorsque cet exposant passe le second degré ; je supplée ce qui manque à cette méthode, en donnant le procédé qu'il faut suivre pour les quantités littérales. De plus, je fais voir que la méthode de Newton, pour les quantités numériques, peut induire en erreur dans quelques occasions : c'est lorsque la racine d'une quantité contient des fractions, et que cette quantité elle-même n'en renferme pas. Je montre ce qu'il faut faire alors pour remédier à cet inconvénient.

M. s'Gravesande qui a commenté l'article de l'Arithmétique universelle de Newton, où se trouve cette méthode, n'a point remarqué les cas qui peuvent y échapper, et il n'a point donné la manière de l'appliquer aux quantités littérales de tous les degrés.

Toutes ces opérations, lorsqu'on veut les appliquer à une puissance quelconque, supposant qu'on connoisse la formule du binome, je saisis l'occasion qu'elles me fournissent d'amener l'invention de cette fameuse formule. Je la démontre d'une manière nouvelle, et je fais voir les différens usages qu'elle a fourni, tels que le moyen de trouver par approximation toutes sortes de quantités composées à volonté de radicaux, de fractions, etc.; ce qui peut préparer les Commençans à l'analyse de l'infini.

La cinquième partie traite des équations du troisième et quatrième degré, qui ont tous leurs termes, c'est-à-dire, toute la complication qu'elles peuvent avoir. Je donne d'abord la solution générale des équations du troisième degré, et je fais voir ensuite les équations particulières, où cette solution n'apprend point la valeur de l'inconnue, ce

qui forme le cas qu'on appèle irréductible. Dans ces équations, au défaut des racines exactes, j'enseigne à en trouver par approximation; je donne, pour y parvenir, une méthode nouvelle, beaucoup plus simple que celles qui ont paru jusqu'à présent. Par cette méthode, dès la première opération, j'ai la valeur de la racine cherchée à un millième près, à la seconde à un millionième, et ainsi de suite.

Je passe de-là aux équations du quatrième degré, et après avoir donné leur résolution générale, je fais voir que cette résolution, ainsi que celle des équations du second degré, a cet avantage sur la résolution des équations du troisième, qu'une seule et même formule peut, à l'aide des signes *plus* et *moins*, exprimer toutes les racines de l'équation. Je démontre aussi, ce que les Auteurs Élémentaires n'ont fait que supposer, que les quatres racines d'une équation du quatrième degré, sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires; c'est-à-dire, que je prouve que les racines imaginaires des équations du quatrième degré,

peuvent, ainsi que celles du second, être regardées comme composées d'une partie réelle, et d'une partie qui est la racine quarrée d'une quantité négative.

La résolution des équations du quatrième degré, étant fondée sur celle des équations du troisième, elle a de même que ces équations, cet inconvénient, que dans un cas on ne sauroit avoir les racines que par approximation. Je donne une manière bien simple de trouver cette approximation, en employant celle que j'avois donnée précédemment pour les équations du troisième degré.

Quant aux équations qui passent le quatrième degré, je ne donne rien pour leur résolution en général, parce que, jusqu'à présent, on n'a pu y parvenir, quelques efforts qu'aient fait les Analystes. L'on est réduit, excepté quelques cas particuliers que j'ai traités, pour la plûpart, dans la troisième et quatrième partie, à de simples approximations, qui sont beaucoup plus faciles, lorsqu'on est aidé de la Géométrie : c'est pourquoi je remets à traiter de ces équations, au tems où j'enseignerai la théorie des lignes courbes.

On devoit s'attendre, après ce que j'avois dit en annonçant mes Élémens d'Algèbre, à y trouver des applications de cette science à la Géométrie, j'ai cru cependant devoir les réserver pour un autre Ouvrage. Il m'a paru qu'en donnant un Traité entier de pure Algèbre, c'étoit offrir aux Commençans les moyens de s'y fortifier davantage, et qu'ils gagneroient à ne l'appliquer à la Géométrie, que lorsque les opérations Analytiques ne leur coûteroient plus. J'espère que les principes qu'ils trouveront dans cet Ouvrage, les mettront en état de surmonter les plus grandes difficultés qu'ils rencontreront dans la haute Géométrie.

Au reste, je ne suppose, pour l'intelligence de ce Traité, que les opérations principales de l'Arithmétique, parmi lesquelles je compte la règle de trois ; ceux qui auront lu mes Élémens de Géométrie, posséderont la théorie des proportions, autant qu'il est nécessaire pour entendre tout ce que je dis ici. J'avois d'abord compté donner dans le même livre, tant les Élémens d'Arithmétique, que ceux d'Algèbre, et je n'aurois pas manqué alors de traiter des

proportions plus à fond que je n'ai fait dans mes Élémens de Géométrie ; mais l'ordre que j'ai suivi m'a paru demander de traiter séparément ces deux Sciences. En effet, voulant me rapprocher autant qu'il est possible du chemin des Inventeurs, j'ai dû supposer l'Arithmétique familière à ceux qui vouloient pénétrer dans l'Algèbre.

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

PREMIÈRE PARTIE.

De la Méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des Equations, et de la résolution des Equations du premier degré.

PARMI les différens Problêmes dont les premiers Mathématiciens qui ont eu le nom d'Algébristes se sont occupés, je choisis celui-ci, comme un des plus propres à faire voir comment ils sont parvenus à former la Science qu'on nomme Algébre ou Analyse.

I.

Exemple d'un Problème semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pû se proposer.

Partager une somme, par exemple, 890# à trois personnes, en sorte que la première ait 180# de plus que la seconde, et la seconde, 115# de plus que la troisième.

Voici d'abord comme j'imagine qu'aura raisonné un homme, qui, sans aucune teinture de l'Algébre, sera parvenu à résoudre ce Problême.

Solution de ce Problême, telle qu'on la pourroit trouver sans Algèbre.

Il est évident que si on connoissoit une des trois parts, on connoîtroit aussi-tôt les deux autres. Supposons, par exemple, qu'on connoisse la troisième qui est la plus petite, il faudra y ajouter 115#, et l'on aura la valeur de la seconde; ensuite pour avoir la première, il faudra ajouter 180# à cette seconde, ce qui revient au même que si on ajoutoit 180#, plus 115# ou 295# à la troisième.

Quelle que soit la troisième part, nous savons donc que cette part, plus elle-même avec 115#, plus encore elle-même avec 295#, doit faire une somme égale à 890#.

De-là, il suit que le triple de la plus petite part, plus 115#, plus 295#, ou en une fois plus 410#, est égal à 890#.

Or si le triple de la part qu'on cherche plus 410# est égal à 890#, il faut donc que ce triple de la part qu'on cherche soit plus petit que

890# de 410#. Donc ce triple de la plus petite part est égal à 480#. Donc la plus petite part est égale à 160#.

La seconde sera par conséquent de 275#, et la première ou la plus grande de 455#.

C'est vraisemblablement ainsi que les premiers Algébristes ont raisonné, quand ils se sont proposé de pareilles questions ; sans doute qu'à mesure qu'ils avançoient vers la solution d'une question, ils chargeoient leur mémoire de tous les raisonnemens qui les avoient conduits au point où ils étoient; et lorsque les questions n'étoient pas plus compliquées que la précédente, il n'y avoit pas de quoi se rebuter ; mais dès que leurs recherches ont offert plus d'idées à retenir, il a fallu qu'ils cherchassent une manière plus courte de s'exprimer, qu'ils eussent quelques signes simples, avec lesquels, quelqu'avancés qu'ils fussent dans la solution d'un Problême, ils pussent voir d'un coup-d'œil ce qu'ils avoient fait et ce qui leur restoit à faire. Or, l'espèce de langage particulier qu'ils ont imaginé pour cela, c'est l'Algébre.

II.

Pour mieux donner les principes de cette science, nous allons reprendre la même question, nous écrirons en langage ordinaire les

Méthode algébrique d'exprimer le Problème précédent.

raisonnemens que l'Algébriste fait pour résoudre son problême, et en caractères algébriques ce qu'il suffit d'écrire pour aider sa mémoire.

La plus petite ou la troisième part quelle qu'elle soit, je l'exprime par une seule lettre, qui sera par exemple, ... x

La seconde sera par conséquent la première plus 115, ce que j'écris ainsi $x+115$, choisissant le signe + qu'on prononce *plus*, pour désigner l'addition des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe + indique l'addition.

Quant à la première part ou la plus grande, comme elle surpasse la seconde de 180, elle sera exprimée par . . . . . $x+115+180$.

Ajoutant ces trois parts, on aura. . . . . $3x+115+115+180$, ou en réduisant . . . . . $3x+410$.

Mais cette somme des trois parts doit égaler $890^{\#}$, ce qui s'exprime ainsi $3x+410=890$, employant le caractère = qui se prononce *égal* pour exprimer l'égalité des deux quantités entre lesquelles on le place.

Le signe = marque l'égalité.

La question, par ce calcul, est donc changée en une autre, où il s'agit de trouver une quantité dont le triple étant ajouté avec 410, fasse 890. Trouver la résolution de semblables questions, c'est ce qu'on appelle résoudre une équation. L'équation dans ce cas-ci est $3x+$

Une équation est l'égalité de deux quantités. On résout une équation, lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme.

$410 = 890$: on l'appelle ainsi, parce qu'elle indique l'égalité de deux quantités : résoudre cette équation, c'est trouver la valeur de l'inconnue x par cette condition que son triple plus 410 fasse 890.

III.

Pour résoudre cette équation, voici comment l'Algébriste raisonne, et comment il écrit ses raisonnemens. L'équation à résoudre. . . . . $3x + 410 = 890$, m'apprend qu'il faut ajouter. . . . . 410 à $3x$ pour faire la somme de 890; donc $3x$ sont moindres que 890 de 410, ce que j'écris ainsi. . . . . $3x = 890 - 410$.

Résolution de l'équation qui exprime le Problème précédent.

Prenant le caractère — qui se prononce *moins* pour faire ressouvenir que la quantité qu'il précède doit être retranchée de celle qu'il suit.

Le caractère — indique soustraction.

De cette nouvelle équation $3x = 890 - 410$, l'on tire, en retranchant en effet 410 de 890, cette autre équation $3x = 480$.

Mais si $3x$ valent 480, un x vaut donc le tiers de 480 ou 160, ce que j'écris ainsi, $x = \frac{480}{3} = 160$, et la question est résolue, puisqu'il suffit de connoître une des parts pour connoître les autres.

IV.

Autre solution du Problème précédent.

Si on avoit voulu résoudre la question en commençant par chercher la plus grande part, on l'auroit pu de même,

Voici comment on s'y seroit pris.

Soit cette première part. . . . . y.

La seconde ayant 180 de moins, sera $y-180$.

Et la troisième, ayant 115 de moins que la seconde, sera . . . . . $y-180-115$.

Or la somme de ces trois quantités est . . . . . $3y-180-180-115$, c'est-à-dire. . . . . $3y-475$.

Mais cette somme doit égaler 890.

On a donc l'équation $3y-475=890$ qui apprend que $3y$ surpassent 890 de 475, puisqu'il faut retrancher 475 de $3y$ pour avoir 890. Donc $3y=890+475$ ou $3y=1365$.

Donc y ou la plus grande part $=455$ comme ci-dessus.

V.

Si dans le problême il avoit fallu partager une somme plus ou moins grande que celle qu'on a employée, et que les différences eussent été d'autres nombres que ceux dont on s'est servi, il est évident qu'on l'auroit résolu de la même manière. Supposons, par exemple, que le Problême eût été énoncé ainsi :

Partager 9600^tt à quatre personnes, en sorte que la première en ait 300 de plus que la seconde, la seconde 250 de plus que la troisième, et la troisième 200 de plus que la quatrième.

Autre exemple du Problème précédent.

On auroit raisonné de la manière suivante :

En nommant la quatrième x.

La troisième sera $x + 200$.

La seconde. . . . $x + 200 + 250$.

La première . . . $x + 200 + 250 + 300$.

Or, la somme de toutes ces parts doit être égale à 9600. On a donc l'équation

$$4x + 1400 = 9600.$$

Pour résoudre cette équation, je remarque comme dans la précédente, que si $4x$ ne sont égaux à 9600 que lorsqu'on leur a ajouté 1400, il faut qu'ils soient égaux à ce qui reste de 9600 lorsqu'on en a retranché 1400, ce que l'on écrit ainsi . . . . . $4x = 9600 - 1400$,

ou $4x = 8200$.

Mais si quatre x sont égaux à 8200, un x vaut donc le quart de 8200, c'est-à-dire, que $x = \frac{8200}{4} = 2050$: la plus petite part x étant connue, les autres se trouvent tout de suite : la troisième $= 2250$, la seconde $= 2500$, et la première $= 2800$.

VI.

Le problême pourroit être encore plus varié,

et dépendre toujours des mêmes principes ; supposons, par exemple, qu'il fût énoncé ainsi :

Troisième exemple du problème précédent.

Partager 5500 en deux parties, de manière que la première ait un tiers de plus que la seconde, plus 180.

Voici comment on le résoudroit :

Soit la seconde part . . . x.

On aura pour la première $x + \frac{1}{3}x + 180$.

Or, comme leur somme doit égaler 5500, on a donc l'équation $2x + \frac{1}{3}x + 180 = 5500$. Pour résoudre cette équation, je commencerai par ajouter $2x$ avec $\frac{1}{3}x$, ce qui me donne $\frac{7}{3}x$, parce que deux entiers valent six tiers, et que par conséquent ces deux entiers avec un tiers font sept tiers. Donc l'équation précédente se réduit à . . . . . $\frac{7x}{3} + 180 = 5500$, qui deviendra par le même raisonnement que dans les exemples précédens $\frac{7x}{3} = 5500 - 180$

ou . . . . . $\frac{7x}{3} = 5320$.

Or, si le tiers de $7x$ vaut 5320, les $7x$ entiers valent donc trois fois davantage, ce que l'on écrit ainsi. . . . . $7x = 5320 \times 3$.

Le signe × indique la multiplication.

Employant le signe × qui se prononce *multiplié par*, pour désigner la multiplication des deux quantités qu'il sépare.

Ensuite, au lieu de $7x = 5320 \times 3$, il suffit d'écrire $7x = 15960$ que l'on a en multipliant en effet 5320 par 3.

Et par le moyen de cette nouvelle équation, on a $x = \frac{15960}{7} = 2280$, valeur de la seconde part.

La première part sera aisée à trouver ensuite, puisqu'il ne faudra qu'ajouter à cette quantité 2280, son tiers 760, et de plus 180, ainsi qu'on l'avoit proposé, et l'on aura 3220 pour la première part.

Les commençans pourront s'exercer à varier encore davantage l'énoncé du problême précédent, et à le résoudre dans les différens cas qu'ils imagineront; ils seront récompensés de leurs peines par la facilité qu'ils acquerront. Afin de les aider davantage, je vais donner un autre problême qui a encore beaucoup de rapport avec le précédent.

VII.

Nouveau problême de même nature que le précédent.

Trois marchands font une société, le premier fournit 17000^{tt}, le second 13000^{tt}, le troisième 10000^{tt}; comme ils ont besoin de quelqu'un qui se donne les soins que demande leur commerce, celui qui n'a mis que 10000^{tt} se charge de toutes les affaires, à condition qu'il tirera de plus que les au-

tres 3 pour 100 de tout le gain qui se fera : il arrive que ce gain monte à 100000$^{\#}$: on demande ce qu'il faut qu'ils aient chacun.

Soit la part du premier. x

Le second ayant mis moins dans la raison de 13 à 17, doit avoir une somme moindre dans cette même raison, c'est-à-dire, seulement. . . . . $\frac{13}{17}x$.

Le troisième, supposant qu'il n'eût qu'à raison de sa mise, auroit les dix 17emes du premier; mais devant avoir de plus 3 pour 100 sur le tout, c'est-à-dire 3000$^{\#}$, sa part sera . . . $\frac{10}{17}x + 3000$.

Et comme la somme de ces trois parts doit être 100000$^{\#}$, on aura . . . . $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x + 3000 = 100000$

où $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x = 97000$.

Pour dégager l'inconnue de cette équation, soit considéré que $x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ou $\frac{17}{17}x + \frac{13}{17}x + \frac{10}{17}x$ ne signifie autre chose que $\frac{40}{17}x$; on a donc $\frac{40}{17}x = 97000$ ou $40x = 97000 \times 17$ ou $40x = 1649000$ ou $x = \frac{1649000}{40} = 41225$.

La part du premier étant trouvée, celle du second exprimée par $\frac{13}{17}x$, sera $\frac{13}{17} \times 41225$, c'est-à-dire, 31525; celle du troisième, exprimée par $\frac{10}{17}x + 3000$, sera $\frac{10}{17} \times 41225 + 3000 = 27250$.

VIII.

Par ces deux problèmes, les lecteurs entrevoient ce que c'est que l'Algèbre, et ils apprennent qu'en général la solution d'un problème est composée de deux parties ; dans la première, on nomme par une lettre comme x ou y, etc., la quantité inconnue qu'on cherche, ou une de celles qui, étant connue, détermineroit les autres ; on tâche ensuite d'arriver à une équation ou l'inconnue se trouve, ce qui se fait en exprimant de deux manières différentes une même quantité.

La solution analytique d'un problème a deux parties.

Dans la première on exprime ce problème par une équation.

Dans la seconde partie, il s'agit de dégager l'inconnue dans l'équation.

Dans la seconde on résout cette équation.

La première de ces deux parties est difficile à réduire en préceptes clairs pour les commençans ; ce ne peut être que par des exemples qu'on la fasse bien sentir.

Quant à la seconde, on la peut beaucoup plus aisément expliquer d'une manière générale.

IX.

Dans les questions que nous venons de résoudre, on est arrivé à des équations, dans lesquelles l'inconnue ne se trouvoit pas autrement engagée que par la multiplication ou la division de nombres connus ; on appelle ces sortes d'é-

Les équations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues.

quations, équations du premier degré, telles sont $2x - 10 = 56$, $\frac{2}{3}x + 25 = x - \frac{1}{3}x + 30$, etc. Et les problêmes qui conduisent à ces équations sont nommés des problêmes du premier degré.

On les appelle ainsi pour les distinguer de ceux dans lesquels l'inconnue seroit ou quarrée, ou cubée (1), etc., qu'on dit être aussi bien que leurs équations, du second degré si l'inconnue est quarrée, du troisième si l'inconnue est cubée, etc.

Qu'on demande, par exemple, un nombre dont le triple étant ajouté avec le quarré, donnât 65, le problême qu'il faudroit résoudre alors seroit du second degré. Et l'équation $3x + x\,x = 65$ [dans laquelle $x\,x$ désigne le quarré de x] qui exprimeroit les conditions de ce problême, seroit une équation du second degré.

On n'a pû parvenir à la résolution de ces équations qu'après s'être exercé long-tems aux équations du premier degré. Nous allons donc

(1) On doit avoir vu en arithmétique qu'un nombre est quarré ou cubé, suivant qu'il est multiplié une ou deux fois par lui-même. On quarre 7, par exemple, lorsqu'en le multipliant par lui même, on en forme 49, de même on le cube, lorsque le multipliant deux fois par lui-même, on en forme 343.

chercher toutes les règles que demandent celles-ci.

X.

Pour les trouver, reprenons d'abord l'équation $4x - 1400 = 9600$, traitée article V, laquelle est composée des trois termes $4x$, 1400, 9600, [on appelle ainsi toutes les parties d'une équation, séparées les unes des autres par les signes + ou —], et remarquons que par le même raisonnement, par lequel nous en avons tiré que $4x = 9600 - 1400$, nous pourrons dans toutes sortes d'équations prendre quelque terme que ce soit, précédé du signe +, et le passer de l'autre côté du signe = en lui donnant le signe —. Qu'on ait, par exemple, $50 + \frac{10}{3}x = 5x + 30$, il sera permis de passer le terme $\frac{10}{3}x$ en — de l'autre côté, et écrire ainsi l'équation $50 = 5x + 30 - \frac{10}{3}x$; car on peut dire, comme dans l'article V, que puisqu'il faut ajouter $\frac{10}{3}x$ à 50 pour être égal à la quantité $5x + 30$, il faut donc que 50 soit plus petit que $5x + 30$ de la quantité $\frac{10}{3}x$, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $5x + 30 - \frac{10}{3}x$.

Les termes d'une équation sont ses parties séparées par les signes + ou —.

De la même manière qu'on a vu, art. III, que l'équation $3y - 475 = 890$ se changeoit en $3y = 890 + 475$, on verra qu'en général les termes qui sont en — d'un côté du signe d'é-

galité peuvent être passés en + de l'autre. Qu'on ait, par exemple, $32 - 6x = 9x + 119$, on en tirera $32 = 6x + 9x + 119$. Car si 32 doit être diminué de $6x$ pour égaler $9x + 119$ il faut qu'il soit plus grand que $6x$ de cette quantité, c'est-à-dire, qu'il soit égal à $6x + 9x + 119$.

XI.

Tout terme peut être passé d'un côté de l'équation à l'autre, en changeant le signe.

Voilà donc un principe général pour toutes les équations, c'est que *les termes que l'on voudra pourront être passés d'un côté de l'équation à l'autre, en observant de changer leurs signes.* Or, ce principe est d'une utilité infinie, en ce qu'il épargne beaucoup de raisonnemens.

XII.

Par son moyen, on peut toujours changer une équation en une autre, où l'on ait d'un côté du signe =, c'est-à-dire, dans l'un des membres de l'équation, les termes affectés de x et de l'autre côté du signe =, c'est-à-dire, dans l'autre membre de l'équation, tout ce qui est entièrement connu.

On appelle membres d'une équation, ses deux parties séparées par le signe =.

Que l'on ait, par exemble, l'équation $8x + 30 = \frac{5}{3}x + 250$; j'en tire $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$: que l'on ait $60 - \frac{5}{4}x = 250 - \frac{7}{4}x$,

on en tire $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, et ainsi des autres.

XIII.

Lorsqu'après les transpositions nécessaires, on aura fait passer tous les termes affectés de x d'un côté, et les termes connus de l'autre; ce qui se présente le plus naturellement, c'est de réduire chacun des deux membres de l'équation à sa plus simple expression. Qu'on ait, par exemple, $8x - \frac{5}{3}x = 250 - 30$, on en tire aussi-tôt $\frac{19}{3}x = 220$, en retranchant en effet 30 de 250, et en retranchant aussi $\frac{5}{3}x$ de $8x$ ou de $\frac{24}{3}x$ qui lui est égal.

Qu'on ait l'équation $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}x = 250 - 60$, on la change en $\frac{13}{12}x = 190$, à cause qu'en réduisant $\frac{7}{3}x$ et $\frac{5}{4}x$ au même dénominateur, on a $\frac{28}{12}x$ et $\frac{15}{12}x$ dont la différence est $\frac{13}{12}x$, et qu'en retranchant 60 de 250, il reste 190.

XIV.

Par de semblables réductions qui sont toujours faciles à ceux qui savent l'Arithmétique, on changera toutes les équations du premier dégré, quelque composées qu'elles soient, en d'autres qui n'auront que deux termes, dont l'un sera composé d'un certain nombre d'x entier ou rompu, et l'autre un terme entière-

ment connu, telles que sont les équations

$$4x = 8200, \quad \frac{7}{3}x = 5320,$$

résolues dans les articles V et VI.

Rappellons-nous maintenant ce que nous avons dit sur ces équations, et nous en tirerons des principes généraux pour toutes les autres.

De l'équation $4x = 8200$ nous avons tiré $x = \frac{8200}{4}$, parce qu'il s'ensuivoit de ce que $4x$ valoient 8200, qu'un x ne pouvoit valoir que le quart de cette somme; de ce raisonnement et de ceux que l'on formeroit pareillement pour les autres nombres d'x, on tire ce principe général, qu'*on peut ôter le multiplicateur qui affecte l'inconnue dans un des membres de l'équation, en le faisant servir de diviseur à l'autre membre.*

Manière de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue.

XV.

De l'équation $\frac{7}{3}x = 5320$, nous avons tiré $7x = 3 \times 5320$, en remarquant que si le tiers de $7x$ vaut 5320, $7x$ entiers doivent valoir trois fois davantage. De-là on forme ce principe général, que *pour faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue dans un membre de l'équation, on n'a qu'à le faire servir de multiplicateur à l'autre membre.*

Manière de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue.

XVI.

Avec ces règles on est en état de résoudre toutes

toutes sortes d'équations du premier degré. Pour exercer les Commençans, voici quelques exemples.

Exemples d'équations du premier dégré, résolues par les principes précédens.

$\frac{6}{5}x - 90 + \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}x - 82$ se change par la transposition en $\frac{6}{5}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 90 - 82$, ou en réduisant $\frac{6x}{5} - \frac{2x}{3} = 8$, ou $\frac{18}{15}x - \frac{10}{15}x = 8$, ou $\frac{8}{15}x = 8$, ou $8x = 8 \times 15$, ou en dernier lieu $x = 15$.

De même $\frac{2}{7}x + 9 = \frac{1}{3}x - 10$ devient en transposant $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 10 + 9$, ou $\frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x = 19$, ou $\frac{1}{21}x = 19$, ou $x = 399$.

Enfin $\frac{2}{9}x - 40 - \frac{1}{4}x = 60 - \frac{7}{5}x$ donne en transposant $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, qui, en réduisant d'abord $\frac{2}{9}$ et $\frac{1}{4}$ au même dénominateur devient $\frac{7}{5}x - \frac{1}{36}x = 100$, et qui, en réduisant $\frac{7}{5}$ et $\frac{1}{36}$ au même dénominateur, devient ensuite $\frac{247}{180}x = 100$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

XVII.

Au lieu de réduire toutes les fractions au même dénominateur, on peut faire disparoître l'un après l'autre, tous les diviseurs de l'équation donnée, au moyen de la méthode suivante, qui a dû être bientôt imaginée par ceux qui, les premiers, ont manié ces sortes d'équations.

Manière de faire évanouir les fractions d'une équation.

Soit repris l'exemple précédent $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$, il est clair que si on multiplie

les deux membres de cette équation par 9, les deux produits seront les mêmes ; car des quantités égales, multipliées par le même nombre, doivent donner le même produit ; on aura par cette multiplication $\frac{18}{9}x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$ qui, à cause que $\frac{18}{9}x = 2x$, se réduit à $2x - \frac{9}{4}x + \frac{63}{5}x = 900$, dans lequel le diviseur 9 a disparu, et l'on voit bien que cela devoit arriver nécessairement ; car $\frac{2}{9}$ de quelque quantité que ce soit, multipliés par 9, doivent donner 2 entiers de cette même quantité. Pour faire disparoître de même 4, il faudra multiplier tous les termes de l'équation par 4, en observant seulement pour le terme $\frac{9}{4}x$, que la multiplication par 4 se fera en ôtant le 4 qui est dessous. Ainsi l'on aura $8x - 9x + \frac{252}{5}x = 3600$, ou $\frac{252}{5}x - x = 3600$, qui, en multipliant les deux membres par 5, deviendra $252x - 5x = 18000$, ou $247x = 18000$, ou $x = \frac{18000}{247}$.

Le principe général qu'on tire de-là, c'est que *pour faire disparoître un diviseur d'un terme, il faut multiplier tous les autres termes par le diviseur, et l'ôter du terme où il est.*

XVIII.

Autre méthode par laquelle on les fait tous évanouir à la fois.

On peut trouver une manière de faire disparoître tous les diviseurs à la fois, en remarquant que si on multiplie tous les termes par

un même nombre qui puisse se diviser par chacun de ces diviseurs, chaque terme se réduira. Multiplions, par exemple, l'équation $\frac{2}{9}x - \frac{1}{4}x + \frac{7}{5}x = 100$ par 180 qui peut se diviser par 9, par 4 et par 5, on aura $\frac{360}{9}x - \frac{180}{4}x + \frac{1260}{5}x = 18000$, ou $40x - 45x + 252x = 18000$, ou $247x = 18000$.

Or, pour trouver ce nombre qui puisse se diviser par tous les diviseurs, il ne faut que multiplier successivement ces diviseurs, les uns par les autres. Qu'on ait, par exemple, $\frac{7}{3}x + \frac{1}{5}x = 160 - \frac{2}{7}x$ dont on veuille faire évanouir les diviseurs, je multiplie d'abord 3 par 5, et je multiplie ensuite leur produit 15 par 7, ce qui me donne 105 pour le nombre qui est divisible par 3, 5, 7: ce nombre trouvé, je m'en sers pour multiplier toute l'équation, ce qui me donne $\frac{735}{3}x + \frac{105}{5}x = 16800 - \frac{210}{7}x$, ou $245x + 21x = 16800 - 30x$.

Pour abréger encore cette opération, au lieu de former le produit 105 des trois diviseurs, on se contentera d'écrire ainsi ce produit $3 \times 5 \times 7$, la multiplication donne alors $\frac{7 \times 3 \times 5 \times 7}{3}x + \frac{7 \times 3 \times 5}{5}x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - \frac{7 \times 5 \times 3 \times 2}{7}x$ dans laquelle on voit tout de suite que le nombre 3 doit s'en aller du numérateur de la pre-

mière fraction, puisque la division par 3 doit être détruite en faisant la multiplication par 3; il en est de même du 5 et du 7, qui sont à la fois aux numérateurs et aux dénominateurs des autres fractions.

Par ce moyen on arrive à l'équation $7 \times 5 \times 7x + 7 \times 3x = 160 \times 3 \times 5 \times 7 - 2 \times 3 \times 5x$ qui, en faisant les multiplications indiquées par les signes $\times$, donne $245x + 21x = 16800 - 30x$ délivrée des fractions.

XIX.

Pour suivre le plus vraisemblablement qu'il est possible l'ordre des inventeurs, nous ne nous arrêterons pas maintenant à approfondir davantage la méthode de dégager l'inconnue, mais nous reviendrons à la manière de mettre les Problêmes en équations. La résolution des équations a pu, indépendamment des Problêmes auxquels elles ont rapport, occuper les Algébristes lorsque cette science a été avancée à un certain point; mais il est à présumer que ceux qui en ont jetté les fondemens, n'ont examiné les équations qu'à l'occasion des Problêmes dont elles étoient, pour ainsi dire, le dénouement. D'ailleurs, il se trouve quelquefois dans les équations des complications dont

on ne se seroit pas douté, si la nature des Problêmes qu'on cherchoit ne les avoit amenées.

Nous ne pouvons rien dire ici de plus clair, sur la manière générale de mettre les Problêmes en équations, que ce que nous avons dit, art. VIII; mais nous allons donner plusieurs exemples qui accoutumeront les commençans à cette recherche.

Troisième Problême.

Pour payer un certain nombre d'ouvriers sur le pied de 3# chacun, il manque 8# à un homme qui les fait travailler; mais en ne leur donnant à chacun que 2#, il lui reste 3#: on demande combien cet homme a d'argent.

On emploi une barre en Algébre comme en Arithmétique pour indiquer la division.

Soit x le nombre de livres que possède cet homme; donc $x+8$ est la somme qui peut satisfaire tous les ouvriers sur le pied de 3#; et comme le nombre des ouvriers doit être trois fois plus petit que celui qui exprime cette somme, il sera exprimé par le tiers de $x+8$, ce qu'on écrira ainsi $\frac{x+8}{3}$; car en Algébre comme en Arithmétique une barre horisontale indique toujours la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

De plus, puisqu'il reste 3# quand on ne donne que 2# à chaque ouvrier; $x-3$ est donc la somme suffisante pour payer tous ces

ouvriers à raison de 2 ᵗᵗ chacun. Donc $\frac{x-3}{2}$ peut exprimer le nombre d'ouvriers; mais puisque nous avons deux valeurs du même nombre, il faut qu'elles soient égales; le Problême est donc réduit à la résolution de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$.

Pour la résoudre, nous commencerons par faire disparoître le diviseur 2 du membre $\frac{x-3}{2}$ de cette équation, en multipliant l'autre membre par ce même nombre 2, ce qui changera l'équation en $x-3 = \frac{2x+16}{3}$; car il est évident que le double de $\frac{x-3}{2}$ est $x-3$, et que le double $\frac{x+8}{3}$ sera $\frac{2x+16}{3}$ par la même raison que $2x+16$ est le double de $x+8$. On fera ensuite évanouir le diviseur 3 de l'équation $\frac{2x+16}{3} = x-3$, en multipliant le second membre par 3 et en l'ôtant du premier, ce qui donnera $2x+16 = 3x-9$, ou $x = 25$.

Si on veut savoir à présent combien il y a d'ouvriers, il faut prendre une des deux ex-

pressions $\frac{x-3}{2}$ ou $\frac{x+8}{3}$ qu'on a trouvées pour ce nombre, $\frac{x-3}{2}$ par exemple. Puisqu'on sait maintenant que $x = 25$, $x - 3$ sera donc 22, et partant $\frac{x-3}{2}$ sera $\frac{22}{2} = 11$, nombre d'ouvriers demandé.

XX.

Il est bon de remarquer à propos de l'équation $\frac{x-3}{2} = \frac{x+8}{3}$, qu'il ne seroit pas permis pour y appliquer la règle de l'art. XI, de changer de côté et de signe les quantités -3 et $+8$, et d'écrire ainsi l'équation $\frac{x-8}{2} = \frac{x+3}{3}$, parce que le nombre -3 n'est pas proprement un terme du premier membre, mais seulement un terme de son dividende $x - 3$, la quantité $\frac{x-3}{2}$ n'étant réellement qu'un seul terme de l'équation, ainsi que $\frac{x+8}{3}$. Pour appliquer donc la règle de l'article XI, il faudroit commencer par prendre, ainsi qu'il est indiqué par le nombre 2 qui est sous la première barre, la moitié de $x - 3$ ce qui donneroit $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$; en-

suite il faudroit prendre, à cause du 3 qui est sous l'autre barre, le tiers de $x+8$ qui seroit $\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$: égalant alors ces deux quantités, on auroit l'équation $\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ dans laquelle on pourroit faire les transpositions qu'on voudroit.

XXI.

Le Problême précédent pourroit encore être résolu de la manière suivante :

ıtre solution même Prone.

Que y exprime le nombre d'ouvriers, $3y$ sera l'argent qu'il faudroit leur donner sur le pied de 3 ## chacun. Mais il manque 8 ## pour les satisfaire à ce prix : donc $3y-8$ est l'argent que possède celui qui les doit payer.

D'un autre côté $2y$ seroit ce qu'il faudroit pour payer ces ouvriers à raison de 2 ##, et il resteroit en ce cas 3 ##. Donc $2y+3$ est une autre expression de l'argent que possède celui qui les doit payer.

Il faut donc égaler les deux quantités $2y+3$ et $3y-8$, ou ce qui revient au même, il faut résoudre l'équation $2y+3=3y-8$ pour avoir la valeur de y. Cette équation étant résolue par les principes précédens, ce qui est fort facile, on aura 11 pour y, c'est-à-dire, pour le nombre d'ouvriers demandé.

XXII.

Un Courrier est parti d'un lieu, il y a 9 heures, et fait 5 lieues en 2 heures : on envoie un autre Courrier après lui, dont la vîtesse est telle qu'il fait 11 lieues en 3 heures ; il s'agit de savoir où le second Courrier attrapera le premier.

Quatrième Problème.

Soit x le chemin que le second Courrier fera avant d'avoir attrapé le premier ; il est évident que ce chemin doit être égal à celui que le premier Courrier avoit fait pendant ses 9 heures d'avance, plus au chemin que le premier Courrier fait pendant le tems que marche le second Courrier. Pour trouver d'abord le chemin que le premier Courrier avoit fait pendant 9 heures, il faut faire cette proportion (1) ou règle de trois.

Comme 2 heures sont à 5 lieues, ainsi 9 heures sont à un quatrième terme, qui suivant les règles connues en Arithmétique, se trouvera en multipliant le second terme 5 de la proportion par le troisième 9, et en divisant leur produit par le premier 2 ; et qui sera par consé-

(1) Je suppose ici, ou qu'on ait lû dans mes Elémens de Géométrie les articles IX et X, etc. de la seconde partie, dans lesquels on traite des proportions, ou qu'au moins on possède bien la règle de trois expliquée dans les Livres d'Arithmétique.

quent, $\frac{45}{2}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier pendant les 9 heures.

Manière dont on exprime les proportions en Algèbre.

Mais comme en Algébre on veut toujours écrire ses opérations le plus brièvement qu'il est possible ; voici comment on dénote cette proportion :

$$2 \text{ heures} : 5 \text{ lieues} = 9 \text{ heures} : \tfrac{45}{2} \text{ lieues}$$

Les signes : servant, l'un à comparer 2 à 5, et l'autre 9 à $\frac{45}{2}$ et le signe = servant à marquer l'égalité qui doit être entre le rapport de 2 à 5, et celui de 9 à $\frac{45}{2}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le même Courrier fera pendant le tems que le second Courrier fera le chemin x, on cherchera, premièrement, le tems qu'il faut au second Courrier pour faire le chemin x, ce qui se trouvera par cette proportion ;

$$11 \text{ lieues} : 3 \text{ heures} = x \text{ lieues} : \frac{3x}{11} \text{ heures}$$

par laquelle, sans s'embarrasser du nombre de lieues contenues dans x, on apprend qu'il suffit de multiplier ce nombre par 3, et de le diviser par 11, pour avoir le nombre d'heures qu'il faut au second Courrier pour le parcourir.

Sans faire attention maintenant si le nombre d'heures exprimé par $\frac{3}{11}x$ est connu, ou s'il est inconnu, on fera cette proportion,

2 heures : 5 lieues $= \frac{3}{11}x$ heures : $\frac{15}{22}x$ lieues

dont le quatrième terme $\frac{15}{22}x$ exprime chemin du premier Courrier, pendant le tems $\frac{3}{11}x$, c'est-à-dire, avant d'être attrapé.

Par ce moyen on a la même quantité exprimée de deux façons différentes; car le chemin du second Courrier a premièrement pour expression x, en second lieu il est la somme des $\frac{45}{2}$ lieues d'avance qu'avoit le premier Courrier sur lui, et des $\frac{15}{22}x$ que ce même premier Courrier devoit avoir fait, jusqu'à ce qu'il fût attrapé. Egalant donc ces deux expressions, on aura l'équation $x = \frac{45}{2} + \frac{15}{22}x$ qui donne par les règles précédentes $x = 70 + \frac{5}{7}$.

XXIII.

Si le premier Courrier, outre l'avantage qu'il a d'être parti plutôt, avoit encore celui d'être parti d'un lieu plus avancé, la question, quoique plus compliquée, seroit aisément réduite aux mêmes principes.

Que le premier Courrier, par exemple, allant en Espagne, soit parti d'Orléans le lundi à 8 heures du soir en faisant 7 lieues en 3 heures, et que le second Courrier, allant après le premier, soit parti le mardi matin à 10 heures de Paris, supposé à 34 lieues d'Orléans, en faisant 13 lieues en 4 heures, on demande le lieu de leur rencontre.

Pour résoudre cette question, il faut prendre la différence de 8 heures du soir, à 10 heures du matin, ce qui donne 14 heures; et comme le premier fait 7 lieues en 3 heures, on aura par cette proportion :

$$3 \text{ heures} : 7 \text{ lieues} = 14 \text{ heures} : \tfrac{98}{3} \text{ lieues}$$

Lesquelles étant ajoutées avec les 34 lieues d'avance, donneront $34 + \frac{98}{3}$ ou $\frac{200}{3}$ lieues pour la distance de Paris où étoit le premier Courrier, lorsque le second est parti. Ensuite on fera comme ci-dessus, cette proportion ;

$$13 \text{ lieues} : 4 \text{ heures} = x \text{ lieues} : \tfrac{4}{13}x \text{ heures}$$

nombre d'heures nécessaires au second Courrier pour faire le chemin x.

Mais pendant ce même nombre d'heures, le premier Courrier aura fait un chemin qu'on trouvera ainsi :

$$3 \text{ heures} : 7 \text{ lieues} = \tfrac{4}{13}x \text{ heures} : \tfrac{28}{39}x \text{ lieues}$$

L'on aura donc l'équation $x = \frac{28}{39}x + \frac{200}{3}$ d'où l'on tire, par les règles expliquées ci-dessus, $x = 236 + \frac{4}{11}$, chemin du second Courrier, lorsqu'il aura attrapé le premier.

XXIV.

Lorsque les premiers Algébristes ont eu trouvé la solution de quelque question qui les intéressoit, ils n'ont guères manqué d'en faire différentes applications en variant les nombres don-

nés dans ces questions. Par exemple, ils auront répété plusieurs fois la question précédente, en changeant les rapports des vîtesses des Courriers, et la distance entre leurs départs. Dans ces différentes applications, ils ont senti qu'il y avoit une partie de l'opération qu'on répétoit à chaque exemple particulier du même Problême, et qui pouvoit se faire une fois pour toutes en cherchant quelque solution, où l'on ne se restreignît point à tel ou tel nombre particulier, mais qui fût générale pour tout nombre donné. Pour faire voir ce qu'ils ont imaginé à ce sujet, nous allons reprendre le Problême précédent, et le traiter le plus généralement qu'il est possible.

Soit exprimée la distance qui est entre les deux Courriers par la lettre. . . . . *a*, on fera de cet *a* le nombre de lieues qu'on voudra, lorsque la question sera poussée jusqu'à la fin.

Solution du Problême précédent, pris généralement.

Soit exprimé ensuite le nombre d'heures dont le départ du premier Courrier a précédé celui du second par la lettre. - - - - - - - - - - - *b*

Que la vîtesse du premier Courrier soit telle qu'il fasse le nombre de lieues. . . . . *c*
pendant le nombre d'heures. . . . . *d*

Que la vîtesse du second Courrier soit telle

qu'il fasse le nombre de lieues. . . . . *e*
dans le nombre d'heures . . . . . *f*

Soit enfin comme dans la solution particulière le chemin que le second Courrier doit faire pour joindre le premier. . . . . *x*

On emploie les premières lettres de l'alphabet, pour exprimer ce que l'on connoit, et les dernières pour ce qu'on ne connoit pas.

C'est une attention qu'on a communément dans l'Algébre de prendre les premières lettres *a*, *b*, *c*, etc. de l'alphabet, pour exprimer les quantités connues, et les dernières *s*, *t*, *u*, *x*, etc. pour celles qu'on cherche.

Pour trouver présentement, à l'exemple de la méthode qu'on a suivie dans l'exemple précédent, le chemin que fait le premier Courrier pendant le nombre d'heures *b*, il faudra chercher le quatrième terme d'une proportion, dont le premier terme soit le nombre d'heures *d*, le second le nombre de lieues *c*, le troisième le nombre d'heures *b*, et il est clair que cette opération se fera, comme dans toutes les autres règles de trois, en multipliant le second et le troisième terme, l'un par l'autre, et en divisant leur produit par le premier terme.

Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles, sont censées se multiplier.

Quant à la manière d'exprimer le produit de ces termes qui ne sont plus comme ci-dessus des chiffres, mais des lettres propres à exprimer des nombres quelconques, ce qu'on a trouvé de plus simple, c'est de placer à côté l'une de l'autre, les lettres qu'on veut multi-

plier ; à l'égard de la division, nous avons déjà vû qu'en Algébre, comme en Arithmétique, on mettoit une barre horizontale entre les quantités qu'on veut diviser.

Par ce moyen la proportion précédente s'écrit ainsi $d : c = b : \frac{bc}{d}$.

Ayant donc $\frac{bc}{d}$ pour exprimer le chemin que le premier Courrier a fait avant que le second soit parti, si on ajoute à ce chemin la distance a qui étoit entr'eux, on aura pour le chemin d'avance du premier au moment du départ du second. . . . . $a + \frac{bc}{d}$.

Pour trouver ensuite le chemin que le premier Courrier fait pendant que l'autre court après lui et qu'il parcourt x ; commençons, ainsi que ci-dessus, par trouver le temps que le second Courrier met à parcourir l'espace x, ce qui se fera par le moyen d'une proportion. . . . . $e : f = x : \frac{fx}{e}$ dont le premier terme sera le nombre de lieues e ; le second, le nombre d'heures f ; le troisième, le nombre de lieues x, et le quatrième, $\frac{fx}{e}$ le temps cherché.

Or, quel que soit le nombre d'heures $\frac{fx}{e}$ qu'ait couru le second Courrier pour attraper le premier, on sait que si on fait une proportion dont les trois premiers termes soient, 1°. le nombre d'heures d; 2°. le nombre de lieues c; 3°. le nombre précédent $\frac{fx}{e}$, le quatrième terme sera le chemin que le premier Courrier a fait dans le même tems que le second a parcouru x.

Cette proportion s'écrira ainsi $d : c = \frac{fx}{e}$.

$c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$ nombre de lieues faites par le premier Courrier, pendant que le second parcourt x.

Mais le chemin du premier Courrier ajouté avec le chemin $a + \frac{bc}{d}$ qu'il avoit d'avance, doit égaler le chemin du second.

On a donc l'équation $x = a + \frac{bc}{d} + c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$.

Si on se ressouvient des opérations des fractions

tions, on doit savoir que, pour multiplier une fraction comme $\frac{6}{3}$ par 4, il faut multiplier le numérateur (*) et écrire $\frac{6\times 4}{3}$ ou $\frac{24}{3}$. De même

(*) On doit avoir vu dans l'Arithmétique, que le numérateur d'une fraction est le nombre placé au-dessus de la barre, et qui sert de dividende; de même qu'on appelle dénominateur, le nombre qui est au-dessous de la barre, et qui sert de diviseur. Les opérations d'Arithmétique, que je suppose ici, et dans beaucoup d'autres endroits de cet ouvrage, sont expliquées assez clairement dans plusieurs Livres. Pour éviter cependant aux Lecteurs la peine d'y recourir, je vais en peu de mots rappeller ces opérations et les raisons sur lesquelles elles sont fondées.

Pour multiplier une fraction telle que $\frac{5}{7}$ par 8, on multiplie le numérateur 5 par 8, et l'on écrit le même diviseur sous leur produit 40, ce qui donne $\frac{40}{7}$: la raison en est claire; car 8 fois 5 septièmes doivent faire 40 septièmes, comme 8 fois 5 grandeurs quelconques font 40 de ces mêmes grandeurs.

Pour diviser $\frac{3}{5}$ par 4, il faut écrire sous le numérateur 3 le produit 20 de 4 par le dénominateur 5, ce qui donne $\frac{3}{20}$. La raison en est que 1 cinquième devenant 1 vingtième, lorsqu'on le divise par 4, 3 cinquièmes doivent devenir 3 vingtièmes par la même division.

Pour multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{8}{3}$, on multiplie les numérateurs 5 et 8, et on divise leur produit 40 par le produit 21 des dénominateurs 3 et 7, ce qui donne $\frac{40}{21}$. Cette opération est fondée sur ce que le produit de $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit être 3 fois plus petit que celui de 8 par $\frac{5}{7}$, mais 8 par $\frac{5}{7}$ a donné $\frac{40}{7}$; donc $\frac{8}{3}$ par $\frac{5}{7}$ doit donner le tiers de $\frac{40}{7}$, c'est-à-dire $\frac{40}{21}$.

Enfin, pour diviser $\frac{3}{5}$ par $\frac{4}{11}$, il faut multiplier le numérateur 3 de la première fraction par le dénominateur 11 de la seconde, et diviser leur produit 33 par le produit 20 du dénominateur 5

pour multiplier $\frac{fx}{e}$ par c, il faut multiplier c par fx et laisser le diviseur e, ce qui donne $\frac{cfx}{e}$ pour $c \times \frac{fx}{e}$. On sait de plus que quand on divise une fraction comme $\frac{5}{3}$ par un nombre quelconque comme 6, il faut multiplier le dénominateur 3 par ce nombre 6, ce qui donne $\frac{5}{3\times 6}$ ou $\frac{5}{18}$. De même pour diviser la fraction $\frac{cfx}{e}$ par d, il faut écrire $\frac{cfx}{de}$.

Ayant ainsi changé l'expression précédente, $c \times \frac{\frac{fx}{e}}{d}$ en $\frac{cfx}{de}$, l'équation qu'on doit résoudre est $x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$. Opération qui demande qu'on commence, ainsi qu'on l'a enseigné art. XVIII, par multiplier tous les termes excepté le dernier, par le diviseur de afin de l'ôter de ce terme.

---

de la première fraction et du numérateur 4 de la seconde, ce qui donne $\frac{15}{20}$. Opération dont on voit la raison en remarquant que $\frac{5}{6}$ divisés par 4, donneroient $\frac{5}{20}$, et que $\frac{5}{6}$ divisés par $\frac{4}{11}$ qui sont 11 fois plus petits que 4, doivent donner un quotient 11 fois plus grand, c'est-à-dire $\frac{55}{20}$.

Nous aurons par cette opération, $dex = ade + \frac{bcde}{d} + cfx$ ou $dex = ade + bce + cfx$, à cause que $\frac{bcde}{d}$ est la même chose que bce, puisque la quantité bce reste la même lorsqu'on la multiplie et qu'on la divise par d.

Passant le terme cfx dans le premier membre, on aura $dex - cfx = ade + bce$.

Afin de trouver x dans cette équation, nous remarquerons que, si nous connoissions les nombres de, et cf qui expriment ce que contiennent d'x les termes dex, et cfx, nous retrancherions le second du premier, et que le reste qui exprimeroit la quantité d'x contenue dans le premier membre de l'équation, serviroit de diviseur au second membre, pour avoir la valeur de x. Or, sans connoître les nombres de et cf, il est clair que $de - cf$ exprime leur différence, et par conséquent la quantité d'x que contient le premier membre de l'équation $dex - cfx = ade + bce$. Donc x a pour valeur ce qui vient en divisant le second membre par ce nombre $de - cf$. Donc $x = \frac{ade + bce}{de - cf}$; et c'est là la solution générale du Problême précédent; car qu'on sache à présent ce que c'est que a, b, c, d, e, f, on n'aura plus qu'à en faire l'usage in-

diqué par cette valeur générale de x, c'est-à-dire, multiplier successivement a, d, e, l'un par l'autre : ajouter à ce produit celui que l'on a en multipliant successivement b, c, e, et diviser la somme de ces deux produits, par le nombre qui est la différence du produit de c par f au produit de d par e, et l'on aura par cette opération, telle solution particulière qu'on voudra.

XXV.

Application de la solution précédente à des nombres.

Supposons, par exemple, comme dans l'article XXIII, que la distance entre les deux Courriers soit de 34 lieues, que le premier Courrier soit parti 14 heures plutôt que le second, qu'il fasse 7 lieues en 3 heures, et que le second fasse 13 lieues en 4 heures, on aura :

$$a = 34, \quad b = 14, \quad c = 7$$
$$d = 3, \quad e = 13, \quad f = 4$$

qui donneront $ade = 34 \times 3 \times 13$, c'est-à-dire
$= 102 \times 13 = 1326$,
$bce = 14 \times 7 \times 13 = 1274$
et par conséquent $ade + bce = 2600$
$de = 39$, $cf = 28$ et partant $de - cf = 11$
d'où l'on tirera

$$x = \frac{ade + bce}{de - cf} = \frac{2600}{11} = 236 + \frac{4}{11}$$ ainsi qu'on l'a trouvé dans l'art. XXIII.

Autre application.

Si on veut ensuite tirer de la solution géné-

rale le premier cas calculé dans l'article XXII, où les deux Courriers étoient supposés partir du même lieu, le premier ayant 9 heures d'avance, et une vitesse capable de lui faire faire 5 lieues en 2 heures, tandis que le second en fait 11 en 3. On aura dans ce cas. . . . . .

$$a = 0, \quad b = 9, \quad c = 5,$$
$$d = 2, \quad e = 11, \quad f = 3,$$

et substituant ces valeurs dans la formule générale ou valeur de x, on aura $x = -\frac{9 \times 5 \times 11}{2 \times 11 - 5 \times 3}$ $= \frac{495}{7} = 70 + \frac{5}{7}$ ainsi qu'on l'a trouvé dans l'article XXII. On fera de même tant d'autres applications qu'on voudra.

XXVI.

On n'a pas eu plutôt trouvé la manière de généraliser un Problême en se servant de lettres au lieu de nombres, qu'on a presque toujours pris les Problêmes dans leur plus grande généralité ; il faut donc accoutumer les Commençans à les traiter ainsi. Dans cette vue nous allons résoudre le Problême suivant.

Cinquième Problême.

Un ouvrier peut faire un certain ouvrage exprimé par a *dans un tems exprimé par* b ; *un second fait l'ouvrage* c *dans le tems* d, *un troisième l'ouvrage* e *dans le tems* f ; *on demande quel tems il faudra à ces trois Ou-*

vriers travaillans ensemble pour faire l'o vrage g.

Soit x le tems cherché ; on aura l'ouvra fait par le premier dans ce tems, en fais la proportion suivante :

$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

On aura l'ouvrage fait dans le même te par le second Ouvrier en faisant la proportic

$$d : c = x : \frac{cx}{d}$$

Enfin on aura l'ouvrage fait dans le mé tems, par le troisième Ouvrier, par le mo de cette proportion :

$$f : e = x : \frac{ex}{f}$$

Donc $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b}$ est l'ouvrage trois Ouvriers lorsqu'ils travaillent enser pendant le tems cherché ; mais cet ouvrage égaler g ; on a donc l'équation

$$\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} = g.$$

Pour la résoudre, on multipliera, suivar principes de l'article XVIII, toute l'équat par le produit fbd des diviseurs, et l'on a

$$\frac{edbfx}{f} + \frac{cdbfx}{d} + \frac{afdbx}{b} = bdfg$$ q

réduit à $edbx + fcbx + adfx = bdfg$, dans laquelle remarquant que $edb + fcb + adf$ doit exprimer le nombre d'x contenus dans le second membre, on aura

$$x = \frac{bdfg}{bde + bcf + adf}.$$

XXVII.

Pour faire quelqu'application de ce Problême, supposons qu'un Mâçon ait pu faire 7 pieds courans d'une muraille en 5 jours, qu'un second Mâçon en ait pu faire 10 en 3 jours, et un troisième 11 en 4 jours, on demande le tems dans lequel ces trois Mâçons travaillans ensemble, feront 150 pieds courans de la même muraille. Exemple en nombres.

On aura par ces suppositions $a = 7$; $b = 5$; $c = 10$; $d = 3$; $e = 11$; $f = 4$; $g = 150$; et partant $bdfg = 5 \times 3 \times 4 \times 150, = 9000$; $bde = 5 \times 3 \times 11 = 165$; $bcf = 5 \times 10 \times 4 = 200$; $adf = 7 \times 3 \times 4 = 84$, ce qui donnera pour la valeur de x, $\frac{9000}{449}$, ou $20 + \frac{20}{449}$ nombre de jours dans lequel l'ouvrage proposé sera fait.

XXVIII.

Supposons maintenant qu'on demande en quel temps un réservoir de 200 pieds sera rempli par trois tuyaux, dont le premier pourroit remplir 9 pieds cubes en $2\frac{1}{2}$ jours, le second 15 pieds Autre exemple.

cubes en $3\frac{1}{3}$ jours, et le troisième 19 pieds cubes en $5\frac{1}{4}$ jours; on aura $a = 9$; $b = 2\frac{1}{2}$, ou $\frac{5}{2}$; $c = 15$; $d = 3\frac{1}{3}$, ou $\frac{10}{3}$; $e = 19$; $f = 5\frac{1}{4}$ ou $\frac{21}{4}$; $g = 200$. (1)

Par les substitutions on aura. . . . . .

$$x = \frac{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4} \times 200}{\frac{5}{2} \times \frac{10}{3} \times 19 + \frac{5}{2} \times 15 \times \frac{21}{4} + 9 \times \frac{10}{3} \times \frac{21}{4}}$$

devient

$$\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{950}{2 \times 3} + \frac{1575}{2 \times 4} + \frac{1890}{3 \times 4}}$$

Pour réduire cette quantité, je multiplie le numérateur et le dénominateur de la première fraction du diviseur par 4; le numérateur et le dénominateur de la seconde par 3; et le numérateur et le dénominateur de la troisième par 2, ce qui change la quantité

en

$$\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{3800}{2 \times 3 \times 4} + \frac{4725}{2 \times 3 \times 4} + \frac{3780}{2 \times 3 \times 4}}$$

ou $\frac{\frac{210000}{2 \times 3 \times 4}}{\frac{12305}{2 \times 3 \times 4}}$, ou $\frac{210000}{12305}$, ou $17 + \frac{363}{2461}$

(1) On avertit ceux qui ne connoissent pas les Élemens de Géométrie, que le pied cube est une mesure de capacité.

nombre cherché des jours qu'il faudroit pour remplir le réservoir donné, en laissant couler les trois tuyaux à la fois.

XXIX.

On voit par les deux Problêmes précédens, que les règles qu'on a données [art. X et suiv.] pour résoudre les équations numériques du premier degré, peuvent également s'appliquer aux équations littérales ; mais on voit en même-tems que ces règles sont trop succintes pour que les commençans n'aient pas besoin qu'on les conduise encore dans la manière de les employer. Nous nous croyons d'autant plus obligés à les aider par un grand nombre de ces applications, que c'est probablement à un pareil travail qu'on doit plusieurs opérations d'Algébre très-utiles, que nous allons, pour ainsi dire, découvrir chemin faisant.

Les règles des art. X et suiv. suffisent pour les équations littérales.

L'application de ces règles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algébre.

Soit proposé de résoudre l'équation $2ac + ab - ax = 3ac + 2ax - 5ab - dx$.

Je commence par passer les termes $3ac$ et $-5ab$ dans l'autre membre de l'équation en les changeant de signes, ce qui me donne $2ac + ab - ax - 3ac + 5ab = 2ax - dx$. Je passe de même le terme $-ax$ de l'autre côté, en observant aussi de changer son signe, ce qui me donne $2ac + ab - 3ac + 5ab$

Premier exemple de résolution d'équations littérales.

$= 2ax - dx + ax$. Je réduis ensuite ce équation, 1°. en ajoutant ab avec $5ab$, qui me donne $6ab$; 2°. en mettant $-ac$ lieu des termes $2ac$ et $-3ac$; 3°. en mett $3ax$ au lieu de $2ax + ax$; ainsi l'équat proposée devient $6ab - ac = 3ax - dx$ donne. $x = \frac{6ab - ac}{3a - d}$.

XXX.

Deuxième exemple de résolution d'équations littérales.

Soit $5ab + 2ax - 3bd = 2ab - 5$ $+ 7bd - ac - dx$; les termes $5ab - 3$ deviendront $-5ab + 3bd$ en passant dans second membre, et les termes $-5ax -$ deviendront $+5ax + dx$ en passant dan premier; on aura donc $2ax + 5ax +$ $= 2ab + 7bd - ac - 5ab + 3bd$ se réduit à $7ax + dx = 10bd - 3ab -$ en mettant $7ax$ à la place de $2ax + 5a$ $10bd$ à la place de $7bd + 3bd$, et -3 à la place de $2ab - 5ab$.

Dégageant présentement x de cette équat on aura $x = \frac{10bd - ac - 3ab}{7a + d}$.

XXXI.

Réduction des quantités à leur plus simple expression.

Dans la résolution des deux équations cédentes, on a eu besoin de réduire à une

simple expression différens termes de même espèce, tels que $2ac$ et $-3ac$; $5ab$ et ab, etc. comme cette opération est presque toujours nécessaire dans les équations à résoudre et dans les autres parties de l'Algébre, les commençans doivent chercher à la pratiquer facilement. Pour leur en donner le moyen, voici quelques exemples :

Soit $15abc - 13bcd - 7abc + 29bcd - 5abf + 9abc + 6chi$ à réduire.

On appel termes positi ceux qui so précédés de + négatifs ceux sont précédés —.

On prendra d'abord les termes $15abc$, $-7abc$ et $9abc$ qui sont de même espèce, et on ajoutera les deux termes $15abc$ et $9abc$, qui sont l'un et l'autre positifs, c'est-à-dire, affectés du signe +; on retranchera ensuite de leur somme laquelle est $24abc$, le terme $7abc$ à cause qu'il est négatif ou précédé du signe —; par ce moyen $17abc$ sera ce que deviennent les trois termes $15abc - 7abc + 9abc$. De la même manière, au lieu de $29bcd - 13bcd$, on mettra $16bcd$. Quant aux termes $-5abf$ et $6chi$ qui sont seuls de leurs espèces, on les écrira tels qu'ils sont, ainsi la quantité réduite sera $17abc + 16bcd - 5abf + 6chi$.

Soit $\frac{5}{3}ab - \frac{4}{5}ac + \frac{3}{4}ax - ad + 7ab + \frac{5}{7}ax$, on aura en réduisant $\frac{26}{3}ab + \frac{41}{28}ax - \frac{4}{5}ac - ad$.

La quantité $2acd - 5ach - 3acd + 3ach - 6bfi$ deviendra en réduisant $-acd - 2ach - 6bfi$, qui étant entièrement négative, montre que la quantité qu'on vouloit réduire renfermoit plus de négatif que de positif.

XXXII.

Il est à propos d'avertir ici que la réduction qu'on vient d'apprendre dans les exemples précédens, est absolument la même règle que celle qu'on appelle l'addition; car lorsqu'on se propose d'ajouter deux quantités quelconques, il suffit de les écrire de suite, et de les réduire après à leur plus simple expression: qu'on ait besoin, par exemple, d'ajouter la quantité $6ab - 2ac - 3ad$ avec $3ab + ac - 2ad + bf$, il n'y a autre chose à faire que de réduire la quantité $6ab - 2ac - 3ad + 3ab + ac - 2ad + bf$, ce qui donnera donc $9ab - ac - 5ad + bf$ pour la somme des deux proposées.

L'Addition algébrique est la même opération que la précédente.

Si on veut ajouter les deux quantités $2ac - 3ad + af$ et $ad - 5ac - 2af$, il ne s'agira que de réduire la quantité $2ac - 3ad + af + ad - 5ac - 2af$. La réduction faite il viendra $-3ac - 2ad - af$. On s'étonnera peut-être d'abord qu'une Addition puisse

mener à une quantité négative ; mais l'on trouvera bientôt le dénouement de cette difficulté, en remarquant qu'il faut nécessairement, ou que les deux quantités $2ac - 3ad + af$ et $ad - 5ac - 2af$ soient toutes deux négatives, ou qu'au moins l'une des deux soit négative et plus grande que l'autre.

C'est ce qu'on reconnoîtra plus facilement, en faisant quelques exemples en nombres. Supposons d'abord que $a = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $f = 5$; dans ce cas, au lieu de $2ac - 3ad + af$, nous aurons $12 - 24 + 10$ ou simplement -2, et au lieu de $ad - 5ac - 2af$ il viendra $8 - 30 - 20 = -42$. Ainsi leur somme sera -44, et on ne sera pas étonné que la somme de deux quantités négatives soit négative.

Supposons ensuite que $a = 6$, $c = 5$, $d = 3$, $f = 2$, on aura $2ac - 3ad + af = 18$ et $ad - 5ac - 2af = -156$. Or, comme la seconde quantité est négative, et plus grande que la première, la somme doit être négative.

XXXIII.

Comment on peut dire que l'on ajoute une quantité négative.

On demandera peut-être si on peut ajouter le négatif avec le positif, ou plutôt si on peut dire qu'on ajoute une quantité négative. A quoi

je réponds que cette expression est exacte ; quand on ne confond point ajouter avec augmenter. Que deux hommes, par exemple, joignent leurs fortunes, quelles qu'elles soient, je dirai qu'ils ajoutent leurs biens ; que l'un ait des dettes et des effets réels, si ses dettes surpassent ses effets, il ne possédera qu'un bien négatif, et la jonction de sa fortune à celle du premier, diminuera le bien de celui-ci, ensorte que la somme se trouvera, ou moindre que ce que possédoit le premier, ou même entièrement négative.

On tire encore de l'opération précédente la soustraction Algébrique.

XXXIV.

La réduction enseignée dans les articles précédens, donne encore naissance à une autre règle d'Algébre, la soustraction ; car, par exemple, lorsque dans l'équation $2ac+ab-ax=3ac+2ax-5ab-dx$ [art. XXIX], on a passé les termes $3ac-5ab$ de l'autre côté, en les changeant de signe, et qu'on est arrivé à l'équation $2ac+ab-ax-3ac+5ab=2ax-dx$, ou $-ac+6ab-ax=2ax-dx$, je dis qu'on a retranché la quantité $3ac-5ab$ de la quantité $2ac+ab-ax$ et que le reste est $-ac+6ab-ax$. Car en faisant disparoître $3ac-5ab$ du second membre de l'équation, c'est une soustraction qu'on a faite de cette quantité ; or,

pour que l'égalité soit conservée, il faut qu'on ait fait une pareille soustraction de l'autre côté; donc $2ac+ab-ax-3ac+5ab$, ou $-ac+6ab-ax$ est ce qui reste de la quantité $2ac+ab-ax$, lorsqu'on en a ôté $3ac-5ab$.

Procédé de la soustraction.

Ainsi lorsqu'on a deux quantités dont l'une doit être soustraite, il faut changer les signes de celle qu'on veut soustraire, l'écrire à la suite de l'autre, puis faire la réduction des quantités de même espèce, ce qui, indépendamment de ce qu'on vient de dire, pourroit se démontrer de la manière suivante.

Soit la quantité $2ac+ab-ax$ dont on se propose de retrancher la quantité $3ac-5ab$. Il est évident que si on vouloit retrancher de la première quantité simplement $3ac$, il faudroit écrire $2ac+ab-ax-3ac$; mais en retranchant la quantité $3ac$ au lieu de $3ac-5ab$; on retranche une quantité trop grande de $5ab$: donc il faut ajouter les $5ab$ qu'on a ôtés de trop en ôtant $3ac$. Donc il faut écrire $2ac+ab-ax-3ac+5ab$ pour le reste de $2ac+ab-ax$ lorsqu'on a ôté $3ac-5ab$.

Afin de s'exercer dans cette règle qu'on sent bien devoir être employée souvent, j'ajouterai les exemples suivans:

De $5ab + 10fg - 3ac + 2de$ si o
tranche $2ab - 5fg + 6ac + de$, il re
$5ab + 10fg - 3ac + 2de - 2ab +$
$- 6ac - de$, ou $3ab + 15fg - 9a$
de.

De la quantité $6aeb + 3agh - 10$
si on retranche $abc - 10aeb - 8agh$
aura $16aeb - abc - 10bcd + 11ag$

De la quantité $3ac + ab + be$ si on re
che la quantité $-ac - 3ab$, il viendra 4
$+ 4ab + be$.

XXXV.

On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative.

Si on s'étonne que dans cette Soustrac
le reste $4ac + 4ab + be$ soit plus grand
la quantité $3ac + ab + be$ dont on se
posoit de soustraire $-ac - 3ab$, ce ne pc
être qu'en confondant, soustraire et dimin
car si on reconnoît, au contraire, que soust
une quantité quelconque, a, par exemple, d
autre b, c'est savoir de combien b surpass
on trouvera très-possible qu'une quantité
mente par une soustraction. Qu'on demai
par exemple, de combien un homme est
riche qu'un autre, si ce dernier n'a que
dettes, on verra bientôt que l'excès de rich
du premier sera ce qu'il possède, plus
somme égale aux dettes de l'autre.

XXX

XXXVI.

Troisième exemple de résolution d'équations littérales.

Soit proposé de résoudre présentement l'équation

$$\frac{cx}{2a} - \frac{ac}{2b} = x - \frac{4ad}{3c}$$

pour faire disparoître d'abord le diviseur $2a$, on le fera servir, suivant l'art. XV, de multiplicateur à tous les termes de l'équation, et l'on aura

$$cx - \frac{ac \times 2a}{2b} = 2a \times x - \frac{4ad \times 2a}{3c};$$

mais au lieu de $ac \times 2a$, il est clair qu'on peut mettre $2aac$, puisque le produit de $2a$ par ac doit être double de celui de a par ac, et que le produit de a par ac doit être aac. De même $2a \times x$ sera $2ax$ et $4ad \times 2a$, sera $8aad$; car le produit de ad par a est aad et celui de $4ad$ par $2a$ doit être octuple de celui de ad par a.

L'équation est donc changée en $cx - \frac{2aac}{2b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$, ou $cx - \frac{aac}{b} = 2ax - \frac{8aad}{3c}$, à cause que $\frac{2aac}{2b}$ ou $\frac{aac}{b}$ sont la même chose; multipliant alors tous les termes de cette équation par b, elle deviendra

$b \times cx - aac = 2ax \times b - \frac{8aad}{3c} \times b$ ou $bcx - aac = 2abx - \frac{8aabd}{3c}$ qui se changera encore en $cbx \times 3c - aac \times 3c = 2abx \times 3c - 8aabd$, ou $3bccx - 3aacc = 6abcx - 8aabd$; car les produits de c par cbx, aac et $2abx$ seroient $bccx$, $aacc$, $2abcx$, et par conséquent ceux de $3c$ par les mêmes quantités, doivent être triples, c'est-à-dire, $3bccx$, $3aacc$, $6abcx$; transposant présentement, on aura $3bccx - 6abcx = 3aacc - 8aabd$ qui donne enfin $x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc}$.

XXXVII.

Dans l'exemple précédent, la multiplication de quelques quantités qui contenoient les mêmes lettres, a donné la répétition de ces lettres dans les produits : or, comme les Algébristes cherchent toujours à s'exprimer de la manière la plus courte, ils ont imaginé, au lieu de répéter une lettre plusieurs fois de suite, de ne l'écrire qu'une seule fois, en plaçant au-dessus de cette lettre, et à sa droite, un chiffre, qui désigne le nom-

Un chiffre placé au-dessus et à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par la multiplication.

bre de fois que cette lettre devroit être répétée. Par-là, au lieu de l'expression précédente

$$x = \frac{3aacc - 8aabd}{3bcc - 6abc},$$

on écrira $x = \frac{3a^2c^2 - 8a^2bd}{3bc^2 - 6abc}$

Lorsque dans une opération on aura besoin de aaa, c'est-à-dire, du produit de aa par a, ou de a multiplié par lui-même deux fois de suite, on mettra simplement a^3. De même au lieu de $cccc$, c^4. Lorsqu'une lettre est ainsi répétée ou plutôt censée répétée à l'aide d'un chiffre, on dit qu'elle est élevée à la puissance exprimée par ce chiffre, et que ce chiffre est son exposant. Ainsi c^4 ou $cccc$ qui est le produit de c trois fois par lui-même, est dit c élevé à la quatrième puissance, et 4 est son exposant. Il faut bien prendre garde de confondre les chiffres qui servent d'exposant avec ceux qui sont à la gauche des lettres et sur la même ligne, ceux-ci sont nommés *coefficiens*; dans $4a^2c$, par exemple, 4 est le coefficient du terme, 2 est l'exposant de a.

Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance exprimée par ce chiffre qu'on appelle *exposant*.

Les chiffres qui sont à gauche et sur la même ligne sont nommés *coefficiens*.

XXXVIII.

Soit l'équation

$$\frac{2ab^2x}{3c^2d} + \frac{5ac^2}{b^2} = \frac{6cd^2}{a^2} - 3x;$$

Quatrième exemple de résolution d'équations littérales.

en multipliant tous ses termes par le diviseur $3c^2d$, on aura

$$2ab^2x + \frac{5ac^2 \times 3c^2d}{b^2} = \frac{6cd^2 \times 3c^2d}{a^2} - 3x \times 3c^2d.$$

Pour faire ensuite les multiplications indiquées par les signes $\times$, nous remarquerons d'avance que ac^2 multiplié par c^2d doit donner pour produit ac^4d; car si au lieu de ac^2 et de c^2d, on écrivoit acc et ccd, ainsi qu'on le pourroit, on verroit tout de suite que le produit de acc par ccd seroit $acccccd$; c'est-à-dire, suivant l'article précédent ac^4d. Ayant donc ac^4d pour le produit de ac^2 par c^2d, il est clair que $15\,ac^4d$ sera celui de $5ac^2$ par $3c^2d$.

De la même manière, on trouvera $18c^3d^3$ pour le produit de $6cd^2$ par $3c^2d$ et $9c^2dx$ pour celui de $3x$ par $3c^2d$. Donc l'équation précédente se changera en $2ab^2x + \frac{15ac^4d}{b^2} = \frac{18c^3d^3}{a^2} - 9c^2dx$.

Multipliant ensuite cette nouvelle équation par b^2, elle devient $2ab^4x + 15ac^4d = \frac{18b^2c^3d^3}{a^2} - 9b^2c^2dx$, et multipliant de même celle-ci

par a^2, on a $2a^3b^4x+15a^3c^4d=18b^2c^3d^3-9b^2a^2c^2dx$ qui donne en transposant $2a^3b^4x+9b^2a^2c^2dx=18b^2c^3d^3-15a^3c^4d$ d'où l'on tire enfin $x=\frac{18b^2c^3d^3-15a^3c^4d}{2a^3b^4+9a^2b^2c^2d}$.

XXXIX.

Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme.

Dans les deux exemples précédens, on a eu besoin de savoir multiplier des quantités exprimées par un simple terme, telle que que $4ad$, $9c^2d$, etc. qu'on appelle communément quantités incomplexes ou monomes, et l'on a trouvé en même-tems ce qu'il falloit pour faire cette opération. La méthode générale qui résulte des raisonnemens qu'on a employés dans ces exemples particuliers, c'est de commencer par multiplier les coefficiens ; d'ajouter ensuite les exposans des mêmes lettres, et d'écrire de suite celles qui sont différentes. Ainsi, suivant cette règle,

Multiplication des quantités incomplexes, tirée des deux exemples précédens.

$3a^5b^3d\times 7a^2bd^2=21a^7b^4d^3$;

$\frac{9}{3}a^2cd\times\frac{2}{5}ac^3bd=\frac{18}{15}a^3c^4bd^2=\frac{6}{5}a^3c^4bd^2$;

$\frac{2}{3}ac^2de\times 9a^4fg=6a^5c^2defg$.

XL.

Cinquième exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{a^2c}{2b^2}+\frac{4cx}{3a}=\frac{5ab}{c}-3a$;

en multipliant tous les termes par $2b^2$, j'aurai

$a^2 c + \frac{8 b^2 c x}{3 a} = \frac{10 a b^3}{c} - 6 a b^2$; multipliant ensuite tous les termes par $3 a$, j'aurai $3 a^3 c + 8 b^2 c x = \frac{30 a^2 b^3}{c} - 18 a^2 b^2$, et faisant encore la même opération pour chasser le diviseur c, il vient $3 a^3 c^2 + 8 b^2 c^2 x = 30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c$, d'où l'on tire $x = \frac{30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$ qu'on peut encore écrire ainsi :

$x = \frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2} - \frac{18 a^2 b^2 c}{8 b^2 c^2} - \frac{3 a^3 c^2}{8 b^2 c^2}$; puisque $8 b^2 c^2$ divisant toute la quantité $30 a^2 b^3 - 18 a^2 b^2 c - 3 a^3 c^2$ divise chacune de ses parties.

Or, la valeur d'x, ainsi écrite, peut avoir une plus simple expression en réduisant chaque terme. Car, 1°. au lieu de $\frac{30 a^2 b^3}{8 b^2 c^2}$, on peut mettre $\frac{15 a^2 b}{4 c^2}$, parce qu'on peut regarder le numérateur, comme le produit de $2 b^2$ par $15 a^2 b$, et le dénominateur comme celui de la même quantité $2 b^2$ par $4 c^2$; divisant donc l'un et l'autre par la même quantité $2 b^2$, il vient

$\frac{15a^2b}{4c^2}$; 2°. au lieu de $\frac{18a^2b^2c}{8b^2c^2}$, on peut mettre $\frac{9a^2}{4c}$; car le numérateur est le produit de $2b^2c$ par $9a^2$, et le dénominateur est le produit de la même quantité $2b^2c$ par $4c$. Au lieu de $\frac{3a^3c^2}{8b^2c^2}$, on peut mettre $\frac{3a^3}{8b^2}$. Donc la valeur d'x réduite est $\frac{15a^2b}{4c^2} - \frac{9a^2}{4c} - \frac{3a^3}{8b^2}$.

XLI.

Division de quantités incomplexes, tirée de cet exemple.

La méthode qu'il faudra suivre généralement dans toutes les opérations de même nature que les précédentes, c'est-à-dire, dans les divisions des quantités incomplexes, est aisée à tirer de ce qu'on vient de dire, sur-tout après avoir vu la multiplication des quantités incomplexes. On peut énoncer ainsi cette méthode.

Diviser d'abord les coefficiens si la division est possible, ôter les lettres qui ont les mêmes exposans aux numérateurs et aux dénominateurs, diviser ensuite les lettres qui auront des exposans différens dans le dénominateur et dans le numérateur, en retranchant les plus petits exposans des plus grands, et en laissant les exposans résidus du côté où étoient les exposans

les plus grands. Quant aux lettres différentes, il n'y a autre chose à faire qu'à les copier.

Comme cette opération est très-souvent nécessaire, il est bon de joindre ici quelques exemples pour en faciliter l'usage aux commençans.

$$\frac{9a^5d^2b^2}{3a^4c^2d^2} = \frac{3ab^2}{c^2}, \quad \frac{18a^4bcd}{14ab^2} = \frac{9a^3cd}{7b},$$

$$\frac{27a^3b^2e^5}{3a^2bc^2} = 9abc^3, \quad \frac{5a^2b^4c^2}{15ab^3} = \frac{abc^2}{3}.$$

XLII.

Sixième exemple de résolution d'équations littérales.

Soit l'équation $\frac{a^2x}{b-c} + dc = bx - ac$.

Pour faire évanouir le diviseur $b-c$, il faudra ainsi que ci-dessus, multiplier tous les termes par ce diviseur, ce qui donnera $aax + \overline{b-c} \times dc = \overline{bx-ac} \times \overline{b-e}$, où j'ai observé, 1°. de mettre une barre au-dessus de $b-c$ dans le premier membre, parce que sans cela on pourroit croire qu'il n'y auroit que c qui dût multiplier dc; 2°. de mettre des barres au-dessus de $bx-ac$ et de $b-c$ dans le second membre, afin qu'on voie que ce sont ces deux quantités entières qui doivent se multiplier.

C'est une attention qu'il faut avoir toutes les fois qu'on veut désigner des produits ou des puissances de quantités complexes ; au lieu d'une barre, on se sert quelquefois de parenthèses. Usage des barres au-dessus des quantités, le même que celui des parenthèses.

Ainsi $a^4 (a+b)$, ou $a^4 \times \overline{a+b}$ signifient également le produit de a^4 par $a+b$; $(a+b) \times (b+d)$ ou $\overline{a+b} \times \overline{b+d}$ le produit de $a+b$ par $b+d$; $(ff+gg)^3$, ou $\overline{ff+gg}^{\,3}$ la quantité $ff+gg$ élevée à la puissance dont l'exposant est 3, c'est-à-dire (art. XXXVII.) multipliée deux fois par elle-même.

Il s'agit maintenant de faire les multiplications indiquées par les signes $\times$. Soit proposé d'abord de multiplier dc par $b-c$, il est clair qu'il faudra multiplier dc par b et en retrancher le produit de dc par c; car $b-c$ étant plus petit que b de c, son produit par dc doit être plus petit que celui de b par dc, de la quantité $c \times dc$. Donc le produit de $b-c$ par dc est $bcd-ccd$.

Venons présentement au produit de $bx-ac$ par $b-c$; pour le trouver, je commence par remarquer qu'en prenant les deux termes $bx-ac$ pour une seule quantité, son produit par $b-c$ doit être, suivant ce qu'on vient de voir, la quantité dont le produit de $bx-ac$ par b

surpasse le produit de $bx - ac$ par c. La question est donc réduite à deux multiplications de la nature de celles qu'on vient de faire et à une soustraction.

La première de ces deux multiplications, celle de $bx - ac$ par b, donnera $bbx - abc$; la seconde celle de $bx - ac$ par c, donnera $bxc - acc$; reste donc à retrancher cette dernière quantité de la première, ce qui donnera, suivant l'art. XXXIV, $bbx - abc - bcx + ac^2$, et c'est-là le produit de $bx - ac$ par $b - c$.

De sorte que l'équation $\frac{a^2x}{b-c} + cd = bx - ac$, ou $a^2x + \overline{b-c} \times cd = \overline{bx-ac} \times \overline{b-c}$ est devenue $a^2x + bcd - c^2d = b^2x - abc - bcx + ac^2$, qui, par les transpositions ordinaires, donnera $bcd - c^2d + abc - ac^2 = b^2x - bcx - a^2x$, ou enfin

$$x = \frac{bcd - ccd + abc - ac^2}{b^2 - bc - a^2}.$$

XLIII.

Multiplication des quantités complexes ou Polynomes, tirée de l'article précédent.

Dans cet exemple, nous avons eu besoin de former une règle d'Algèbre, dont nous ne nous étions pas encore servis, et qui pouvant être souvent utile, mérite que nous nous y ar-

rètions. On appelle cette règle multiplication des polynomes. Polynome ou quantité complexe, signifie en général une quantité composée de plusieurs termes. Si on veut spécifier le nombre de termes d'une quantité, on l'appelle binome, lorsqu'elle en a deux; trinome, lorsqu'elle en a trois, etc.

Exemple de multiplication de Polynomes.

Afin de s'exercer à la multiplication de ces sortes de quantités, il sera bon de prendre quelques exemples: soit premièrement $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$ et $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d$ dont on demande le produit.

En raisonnant comme dans l'article précédent, on verra que, puisque la quantité $3\,a\,b^2 - 4\,b\,c\,d$ est plus petite que $3\,a\,b^2$ de $4\,b\,c\,d$, son produit par $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$ doit être plus petit que celui de $3\,a\,b^2$ par $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$ du produit de $4\,b\,c\,d$ par $2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5$.

En conséquence j'écris d'abord ainsi le produit demandé $\overline{2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5} \times \overline{3\,a\,b^2 - 2\,a^3\,c^2 - 5\,a^4\,b + 6\,a^5} \times 4\,b\,c\,d$.

Faisant présentement les deux multiplications indiquées par les signes $\times$, de la même manière que celles des quantités incomplexes, on aura $6\,a^4\,b^2\,c^2 - 15\,a^5\,b^3 + 18\,a^6\,b^2$ pour la valeur du premier produit $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 3ab^2$.

On aura de même $8a^3bc^3d - 20a^4b^2cd + 24a^5bcd$ pour la valeur du second produit $\overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5} \times 4bcd$. Retranchant alors le second du premier, ainsi qu'il est indiqué dans l'expression précédente, on aura $6a^4b^2c^2 - 15a^5b^3 + 18a^6b^2 - 8a^3bc^3d + 20a^4b^2cd - 24a^5bcd$ pour le produit des deux quantités proposées.

XLIV.

Si le multiplicateur de la quantité précédente, outre les deux termes $3ab^2 - 4bcd$, avoit encore contenu un autre terme, $-5abc$, par exemple, il est évident que pour avoir le produit total, il auroit fallu retrancher de la quantité précédente, le produit de $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ par $5abc$. Car on auroit dit, de même, que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd - 5abc$ étant plus petit de $5abc$ que le multiplicateur $3ab^2 - 4bcd$, son produit par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$ doit être plus petit de $\overline{5abc \times 2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$ que le produit de $3ab^2 - 4bcd$ par $2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5$. Par la même raison, s'il y avoit eu un autre terme, $3acc$, par exemple, au multiplicateur avec le signe $+$, il auroit fallu ajouter le produit $3acc \times \overline{2a^3c^2 - 5a^4b + 6a^5}$ aux produits précédens.

En général, on voit qu'un multiplicande quelconque, c'est-à-dire, une quantité quelconque à multiplier, étant donnée avec la quantité qui doit lui servir de multiplicateur, il faudra former tous les produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, et ajouter ou retrancher ces produits, suivant que les termes qui les auront donnés, auront le signe + ou le signe —. Principe fondamental des multiplications.

Pour exécuter cette opération avec autant d'ordre qu'il est nécessaire, voici le procédé qu'on suit.

XLV.

On commence par écrire le multiplicateur sous le multiplicande, et l'on tire une barre sous le multiplicateur. Pour former ensuite la première ligne du produit que l'on doit écrire sous cette barre, on multiplie le premier terme du multiplicateur par chacun des termes du multiplicande, en observant de laisser à chacun de ces produits, le signe du terme du multiplicande, si le premier terme du multiplicateur n'a aucun signe, et est par conséquent censé avoir le signe +. Méthode qu'il faut suivre dans la multiplication.

Pour former ensuite la seconde ligne qui doit être écrite sous la première, on multiplie le second terme du multiplicateur par tous les

termes du multiplicande, et si ce second terme du multiplicateur a encore le signe +, c'est absolument la même opération que pour la première ligne ; mais s'il a le signe —, à chacun des produits dont cette ligne est composée, on met un signe contraire à celui du multiplicande auquel il a rapport. Toutes les autres lignes du produit étant formées de la même manière, par le moyen des autres termes du multiplicateur multipliés par tous ceux du multiplicande, on tire une barre, et l'on fait l'addition ou réduction de tous ces produits particuliers; la quantité qui vient alors est le produit demandé.

Nous venons de supposer que le premier terme du multiplicateur avoit le signe +; si cependant il avoit le signe —, on voit bien qu'à l'égard de ce terme, comme à l'égard des autres qui auroient aussi le signe —, il faudroit observer de prendre les signes contraires à ceux des termes du multiplicande, en écrivant le produit de ces termes.

XLVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin d'éclaircir cette méthode, appliquons-la à un exemple. Soit proposé de multiplier les deux quantités $2ab - 4ac + ad$ et $3ab - 5ac + 2ad$. La première étant prise pour le multi

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Case 1.

$$6a^2b^2 - 2$$

Case 2.

$$10a^6b^2 - 9a^4$$

Case 4.

$$\begin{array}{r} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\ \hline 4a^8x^4 - 6a^4b^4x \\ + 6a^4b^4x^2y^2 - 9b \\ \hline 4a^8x^4 - 9b^8y^4 \end{array}$$

Case 5.

$$\begin{array}{r} 4a^2bx \\ -6a^2bx \\ \hline 4a^2bx^2 - 2abx^2y \end{array} \quad a^3y^2$$

plicande, et la seconde pour le multiplicateur, on écrit cette dernière sous l'autre, et on tire ensuite une barre sous ces deux quantités ; voyez la première case de la table ci jointe.

Cela fait, on remarque que le premier terme du multiplicateur est censé positif, et que par conséquent tous les signes des termes de la première bande du produit doivent être les mêmes que ceux du multiplicande. On écrit donc, suivant cette remarque, à la première ligne sous la barre, le premier terme $6a^2b^2$ que donne le produit de $3ab$ par $2ab$, sans l'affecter d'aucun signe, ce qui est la même chose que si on lui donnoit le signe +.

On met ensuite — pour le signe du second terme de la même bande, parce que c'est le signe du second terme du multiplicande, et on fait suivre ce — de $12a^2bc$ produit de $4ac$ et de $3ab$. On conserve de même le signe + du troisième terme du multiplicande pour le troisième terme de la première bande du produit, et l'on écrit pour ce terme $3a^2bd$ produit de ad et de $3ab$. La première bande du produit étant ainsi achevée, on remarque que le second terme du multiplicateur a le signe —, et que par conséquent il faut changer tous les signes du multiplicande pour former les termes de la seconde bande du produit. Ainsi le premier

terme de cette seconde bande doit avoir — qu'on écrit donc devant le produit $10a^2bc$ des deux termes $2ab, 5ac$.

Le second terme de la même bande devant avoir +, puisque le second terme du multiplicande a le signe —, on écrit ce signe + devant le produit $20a^2c^2$ des deux termes $4ac, 5ac$.

Le troisième terme ad du multiplicande étant précédé du signe +, le troisième terme de la seconde bande sera donc affecté du signe — qu'on écrit devant le produit $5a^2cd$ des deux termes $ad, 5ac$.

Quant à la troisième bande du produit cherché, comme le troisième terme du multiplicateur a le signe +, il faudra garder tous les signes du multiplicande, et par conséquent le premier terme, c'est-à-dire le produit de $2ab$ et de $2ad$, sera $4a^2bd$ précédé du signe +; le second, c'est-à-dire, le produit de $4ac$ et de $2ad$, sera $8a^2cd$ précédé du signe —, et le troisième, c'est-à-dire, le produit de $2ad$ par ad, sera $2a^2d^2$ précédé du signe +.

Afin que les Commençans puissent se fortifier dans la pratique de cette régle, j'ai joint dans la Table quelques exemples.

XLVII.

Soit l'équation $\frac{ab^2+abd-abx}{d-c}=ax-ac$, on fera d'abord évanouir le diviseur $d-c$ en multipliant $ax-ac$ par $d-c$; et l'on aura

Sixième exemple de résolution d'équations littérales.

$ab^2+abd-abx=ax-ac \times d-c$, ou $ab^2+abd-abx=adx-acd-acx+acc$, qui, en passant tous les termes affectés d'x d'un côté, et les termes connus de l'autre, deviendra $ab^2+abd+acd-acc=abx+adx-acx$, d'où l'on tire

$$x=\frac{ab^2+abd+acd-ac^2}{ab+ad-ac}.$$

Dans cette expression, une certaine relation qu'on apperçoit entre les termes du dividende et ceux du diviseur, peut faire soupçonner que la division se feroit exactement, et invite par conséquent à tenter cette opération, qui doit paroître assez aisée à faire, après avoir vu celle de la multiplication dont elle est l'inverse.

Pour reconnoître donc si en effet $ab+ad-ac$ peut diviser exactement $ab^2+abd+acd-ac^2$, soit d'abord divisé un des termes de cette dernière quantité par un de ceux de la première ; soit divisé ab^2 par ab, par exemple, et soit écrit à part le quotient b. Soit

Manière de faire la division indiquée dans cet exemple.

ensuite multiplié ce quotient b, ou plutôt cette première partie du quotient cherché, par le diviseur total $ab+ad-ac$, et soit retranché le produit $ab^2+abd-abc$ du dividende; le reste $ab^2+abd+acd-ac^2-ab^2-abd+abc$, ou $acd-ac^2+abc$, sera encore à diviser par le même diviseur, et son quotient devra être ajouté au précédent b pour former le quotient total cherché.

Pour faire cette division, je prends encore un des termes de la quantité $acd-acc+abc$ qui reste à diviser, et je le divise par un de ceux du diviseur. Je choisis acd, par exemple, pour le diviser par ad. Or cette division me donne c; je multiplie donc encore ce nouveau quotient par le diviseur total $ab+ad-ac$, et je retranche le produit $abc+acd-ac^2$ du dividende restant $acd-ac^2+abc$; et comme les deux quantités sont les mêmes, et qu'il ne reste par conséquent rien à diviser, je vois par-là que $b+c$ est exactement le quotient de la division de $ab^2+abd+acd-ac^2$ par $ab+ad-ac$ et partant la valeur d'x.

XLVIII.

Méthode générale pour les diviseurs des quantités complexes.

Après avoir fait la division précédente, on voit à-peu-près comment on doit se conduire dans les autres exemples. Pour opérer dans la

division avec un certain ordre, on écrit ordinairement le diviseur à droite du dividende en les séparant par une barre verticale, ainsi que dans la division arithmétique. Ayant choisi dans le dividende un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, on écrit le quotient de ces deux termes sous le diviseur, et on lui donne + pour signe, si les deux termes qu'on a divisés l'un par l'autre ont le même signe; on lui donne, au contraire, le signe —, si ces deux termes ont des signes différens. Cela fait, on multiplie ce quotient par tous les termes du diviseur, et on écrit le produit qui en vient sous le dividende. Mais comme l'usage de ce produit doit être de le retrancher du dividende, on observe, en l'écrivant sous ce dividende, de mettre à chaque terme le signe contraire de celui que donneroit la multiplication.

Ce produit étant ainsi écrit, on tire une barre, et l'on fait la réduction avec le dividende, et la quantité qui reste est à diviser de nouveau par le même diviseur. On y choisit de même un terme qui puisse se diviser par un de ceux du diviseur, et on écrit le terme qui en vient pour quotient à côté du premier, en observant de lui donner le signe +, ou le signe —, suivant que les deux termes qu'on aura divisés, seront de mêmes ou de différens signes. On mul-

tiplie ensuite ce terme par tous ceux du diviseur, et on écrit le produit sous la quantité à diviser, en observant de même que la première fois, de changer les signes que la multiplication donne. Tirant alors une barre et réduisant, si tous les termes ne se détruisent pas, on écrit le reste sous cette barre, et on pousse l'opération de la même manière, jusqu'à ce que les termes du dividende soient évanouis.

Manière d'éviter tout tâtonnement dans la division.

Dans cette opération, on pourroit quelquefois être embarrassé à choisir parmi les termes du dividende et du diviseur, ceux qui doivent servir à former les termes du quotient. Afin d'éviter tout tâtonnement dans ce choix, voici ce qu'on a imaginé :

On choisit d'abord à volonté une lettre qui se trouve dans le dividende et dans le diviseur ; et l'on dispose les termes de ces deux quantités, de manière que les premiers soient ceux où cette lettre a le plus grand exposant, que les seconds soient ceux où la même lettre a le plus grand exposant après les premiers, et ainsi des autres termes. Ayant donc ordonné les deux quantités proposées par rapport à la même lettre [c'est ainsi qu'on appelle cette opération], on n'a plus aucun tâtonnement à faire pour choisir les termes qui doivent se diviser, c'est toujours les

Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre.

premiers termes du dividende et du diviseur qu'il faut prendre.

Lorsqu'on aura formé par ces deux premiers termes du diviseur et du dividende, le premier terme du quotient, et qu'on aura écrit avec des signes différens, le produit sous le dividende, s'il arrive que cette opération ait introduit des termes qui n'aient point de semblables dans le dividende; il faudra, en écrivant la quantité qui vient après la réduction, avoir l'attention de les placer de manière que la quantité qui reste à diviser, reste toujours ordonnée par rapport à la même lettre que le diviseur.

XLIX.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Afin de faciliter aux commençans l'usage de cette méthode, prenons quelques exemples. Supposons d'abord qu'il s'agisse de diviser la quantité $31aabb+2a^4+24b^4-38ab^3-13a^3b$ par la quantité $-3ab+2aa+4bb$.

Ayant écrit ces deux quantités comme on le voit dans la Table suivante [case première] où elles sont ordonnées par rapport à la lettre a, je divise le premier terme $2a^4$ du dividende par le premier $2aa$ du diviseur, et j'écris le quotient aa sous le diviseur, sans lui donner aucun signe, c'est-à-dire que je le fais positif à cause que les termes $2a^4$ et $2aa$ sont précédés des

mêmes signes. Le quotient aa étant écrit, je le multiplie par tous les termes du diviseur, et comme cette multiplication doit me donner pour premier terme $2a^4$ produit de aa par $2aa$ avec le signe +, je porte ce terme sous le dividende avec le signe — à cause qu'il doit être retranché.

De même le second terme $3ba^3$ produit de aa par $3ba$ devant avoir le signe — par la multiplication, j'écris sous le dividende $+3ba^3$ par la raison qu'il doit être soustrait. Enfin, parce que le troisième terme $4b^2a^2$ produit de aa par $4bb$ devroit avoir par la multiplication le signe +, je lui donne le signe —, en l'écrivant sous le dividende.

Cela fait, je tire une barre et je réduis ; la quantité qui reste alors est $-10ba^3+27b^2a^2-38b^3a+24b^4$ qu'il faut diviser par le même diviseur $2a^2-3ab+4bb$. Pour faire cette division, je prends le premier terme $-10ba^3$ de cette quantité à diviser, et je le divise par le premier terme $2a^2$ du diviseur, il vient $5ba$ pour le quotient auquel je donne le signe —, à cause que les termes $-10ba^3$ et $2a^2$ ne sont pas précédés des mêmes signes. Ayant écrit $-5ba$ à côté de a^2, il s'agit de multiplier ce nouveau terme du quotient par tous ceux du

diviseur, et d'en changer les signes en les écrivant sous la quantité à diviser.

Je multiplie donc d'abord $5\,b\,a$ par $2\,a^2$, et comme le produit devroit être négatif à cause que le signe — de $5\,b\,a$ doit changer, suivant les règles de la multiplication, les signes du multiplicande $2\,a^2 - 3\,b\,a + 4\,b^2$, et que, suivant ce que nous venons de dire, les produits doivent être changés de signe lorsqu'on les écrit sous la quantité à diviser, j'écris $+ 10\,b\,a^3$ sous cette quantité. De même au lieu de donner à $15\,b\,b\,a\,a$, produit de $3\,b\,a$ par $5\,b\,a$, le signe + que l'on auroit par la multiplication, je l'écris avec le signe — sous la quantité à diviser. Enfin, au lieu de donner à $20\,b^3a$ produit de $5\,b\,a$ par $4\,b\,b$ le signe — que demandroit la multiplication, je l'écris avec le signe + sous la quantité à diviser. Je tire alors une barre et je réduis, ce qui me donne $12\,b^2\,a^2 - 18\,b^3a + 24\,b^4$, quantité qu'il faut encore diviser par $2\,a^2 - 3\,b\,a + 4\,b\,b$.

Pour faire cette nouvelle division, je divise le terme $12\,b^2\,a^2$ par $2\,a^2$, et j'ai, pour troisième terme du quotient, $6\,b\,b$, que j'écris à côté des deux premiers en lui donnant le signe +, à cause que $12\,b^2\,a^2$ et $2\,a\,a$ ont le même signe.

Multipliant présentement $6\,b^2$ par $2\,a^2$, j'ai

$12\,b^2\,a^2$ auquel je donne le signe — en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe +. De même multipliant $6\,b^2$ par $3\,b\,a$, j'ai $18\,b^3\,a$ auquel je donne le signe + en l'écrivant sous la quantité à diviser, à cause que la multiplication lui auroit donné le signe —. Enfin, multipliant $6\,b\,b$ par $4\,b^2$, j'ai $24\,b^4$ auquel je donne le signe — contraire à celui que donneroit la multiplication. Réduisant alors, je vois que tous les termes se détruisent. Donc la division est exacte. Donc le quotient cherché est $a\,a - 5\,b\,a + 6\,b\,b$,

L.

Autre exemple.

Qu'on se propose maintenant de diviser $6\,b^3\,c - b^4 - 9\,c\,c\,b\,b + 4\,c^4$ par $-3\,c\,b + b\,b + 2\,c\,c$. J'écris ces deux quantités sous la forme qu'on voit dans la case de la Table suivante, en les ordonnant par rapport à la lettre c.

Divisant alors les deux premiers termes, j'ai $2\,c\,c$ pour le premier terme du quotient, lequel étant multiplié par le diviseur, donne, en changeant les signes, la quantité $-4\,c^4 + 6\,b\,c^3 - 2\,b\,b\,c\,c$, qui étant placée sous le dividende, donne pour le reste $6\,b\,c^3 - 11\,b\,b\,c\,c + 6\,b^3\,c - b^4$, dans laquelle j'ai observé que le terme $6\,b\,c^3$ affecté de c^3 introduit par la multiplication, fût placé le premier, afin que la quan-

tité restât ordonnée par rapport à c. Divisant alors ce premier terme $6\,b\,c^3$ par $2\,cc$, j'ai $3\,b\,c$ pour quotient avec le signe $+$. Je multiplie de même ce nouveau terme du quotient par le diviseur, et je porte les termes qui en viennent sous le dividende, en changeant leurs signes. Faisant la réduction ensuite, je n'ai plus que $-2\,b\,b\,c\,c+3\,b^3\,c-b^4$ à diviser. Le premier terme de cette quantité étant divisé par celui du diviseur, donne pour troisième terme du quotient b^2 affecté du signe $-$, à cause que les termes $2\,b^2\,c^2$ et $2\,c^2$ sont de différens signes; et comme le produit de ce troisième terme par le diviseur détruit tous ceux de la quantité à diviser, je conclus que la division est exacte, et que $2\,c\,c+3\,bc-b^2$ est le quotient demandé.

LI.

Attention qu'il faut avoir en ordonnant, lorsqu'il y a plusieurs lettres.

Lorsqu'on veut ordonner le dividende et le diviseur par rapport à une même lettre, si on trouvoit plusieurs termes où cette lettre fût élevée à la même puissance, on tomberoit encore dans l'inconvénient du tâtonnement, à moins qu'on n'ordonnât encore ces termes par rapport à une autre lettre commune aux deux quantités.

Supposons, par exemple, que le dividende étant ordonné par rapport à la lettre d, on eût de suite $3\,a\,c\,c\,d^3-c^3\,d^3-3\,a\,a\,c\,d^3+a^3\,d^3$

pour les premiers termes du dividende, et que dans le diviseur on eût de même $aad^2 + ccd^2 - 2acd^2$ pour les premiers termes, en arrangeant ainsi ces deux quantités $a^3d^3 - 3caad^3 + 3ccad^3 - c^3d^3$; $a^2d^2 - 2cad^2 + ccd^2$; c'est-à-dire, en les ordonnant par rapport à la letrre a, il n'y auroit aucun tâtonnement à craindre en faisant la division, pourvu qu'on observât, à chaque fois qu'on voudroit trouver un terme du quotient, que la quantité à diviser fût toujours ordonnée de la même manière. Pour exercer les Commençans à ces attentions dans la division, j'ai joint encore quelques exemples dans la Table suivante.

LII.

Dans la solution des Problêmes précédens, nous n'avons eu besoin que d'une seule inconnue, parce qu'il n'y avoit, à proprement parler, dans ces Problêmes, qu'une quantité à trouver. Mais, comme en avançant dans la science de l'Algébre, on trouve des Problêmes où l'on est obligé d'employer plusieurs inconnues, nous allons voir comment on les traite.

Problème dans lequel on emploie deux inconnues.

Etant données les pesanteurs spécifiques de deux matières qui entrent dans un mixte, le volume et le poids total du mixte, trouver ce qu'il entre de chacune de ces deux matières dans le mixte.

Page 74, Tome I.

$a+4b^2$ $a+6b^2$	Case 1.
$c+bb$ $c-bb$	Case 2.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Que le nombre de pouces cubes contenus dans ce mixte, ou, en général, son volume de quelque manière qu'il soit mesuré, soit exprimé par . . . . . *a*.

Que son poids total soit exprimé par. . . *b*.

Que la quantité de la première matière contenue dans le mixte, par exemple, ce qu'il y a de pouces cubes de cette matière soit exprimé par . . . . . *x*.

Que le poids d'un pouce cube de cette matière, ou, en général, sa pesanteur spécifique soit . . . . . *c*.

La quantité de la seconde matière. . . . *y*.

Sa pesanteur spécifique. . . . . *d*.

On aura pour le poids de la quantité de la première matière qui entre dans le mixte. . . *cx*.

Car, si *x* exprime le nombre de pouces cubes de cette matière, et *c* le poids de chaque pouce cube, leur poids total sera le produit de ces deux nombres. On aura de même pour le poids de la quantité de la seconde matière . . . . . *dy*.

Or, comme ces deux poids doivent, étant ajoutés, faire le poids total du mixte, on a donc l'équation.

$$cx + dy = b.$$

mais cette équation ne sauroit suffire pour résoudre le Problême ; car si on veut en dégager

l'une des inconnues, x, par exemple, on trouve

$$x = \frac{b - dy}{c}$$

qui ne peut apprendre à connoître x qu'en supposant qu'on connoisse y. Il y a donc quelqu'autre opération à faire pour connoître y. Pour y parvenir, il faut voir si on a fait attention à tout ce qu'on demandoit dans l'énoncé de la question, ou, pour parler comme les Algébristes, si on a rempli toutes les conditions du Problême; pour peu qu'on y réfléchisse, on verra qu'on n'a exprimé qu'une des deux conditions, celle que le poids total du mixte soit b, et qu'on n'a pas employé celle qui nous apprend que la quantité de la première matière ajoutée avec la quantité de la seconde doit faire le volume total. On aura donc, par cette seconde condition, l'équation

$$x + y = a$$

qui, ainsi que la première, ne nous apprend la valeur de x, qu'au moyen de celle de y, en nous donnant

$$x = a - y.$$

Mais si on ne peut pas, par aucune de ces deux équations prises séparément, trouver x indépendamment de y, on trouve bientôt, en se servant à la fois de l'une et de l'autre, le

moyen d'avoir y entièrement connu. Car, puisque chacune de ces deux équations donne une valeur de x, on peut égaler ces deux valeurs, ce qui donne l'équation

$$\frac{b - dy}{c} = a - y$$

de laquelle on tire, par les méthodes précédentes, $b - dy = ac - cy$, ou $ac - b = cy - dy$, ou enfin $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

y étant connu, on voit bien que x, qui est également $a - y$, ou $\frac{b - dy}{c}$, est aussi connu. On n'a donc qu'à mettre dans celle qu'on voudra de ces deux quantités, dans la première $a - y$, par exemple, à la place de y, $\frac{ac - b}{c - d}$, et l'on aura $a - \frac{ac - b}{c - d}$ pour la valeur de x.

En examinant la valeur précédente $a - \frac{ac - b}{c - d}$, on découvre bientôt qu'on peut la réduire; car si on veut mettre a au même dénominateur que la fraction $\frac{ac - b}{c - d}$, il faut le multiplier par $c - d$, ce qui donne $\frac{ac - ad}{c - d}$ au

lieu de a ; ainsi il ne s'agit plus que de retrancher de cette fraction la seconde $\frac{ac-b}{c-d}$. Retranchant pour cela leurs numérateurs, et divisant le reste par le dénominateur commun, on aura $\frac{ac-ad-ac+b}{c-d}$ ou $\frac{b-ad}{c-d}$ pour la valeur réduite de x.

Les quantités demandées, tant de la première que de la seconde matière qui entrent dans le mixte, sont donc exprimées, l'une par $\frac{ac-b}{c-d}$ et l'autre par $\frac{b-ad}{c-d}$. Ainsi le Problême est résolu.

LIII.

Si au lieu de substituer la valeur $\frac{ac-b}{c-d}$ de y dans $a-y$, on l'avoit substituée dans $\frac{b-dy}{c}$ qui est également la valeur de x, on auroit eu $\frac{b-d\times\frac{ac-b}{c-d}}{c}$ qui d'abord ne paroît guères être la même valeur que $\frac{b-ad}{c-d}$. Mais comme on sait que les valeurs $a-y$ et $\frac{b-dy}{c}$ de x sont égales, et que ce n'est même

que parce qu'elles le sont qu'on a déterminé la valeur de y, on doit être sûr qu'en examinant ces deux dernières valeurs de x exprimées en quantités connues, on trouvera leur identité. Voici comment on peut parvenir à réduire l'une à l'autre.

On donnera d'abord le dénominateur $c - d$ à la lettre b, ce qui se fera en le multipliant par $c - d$, c'est-à-dire, en mettant $\frac{bc - db}{c - d}$ au lieu de b, et alors la quantité précédente $\frac{b - \frac{d \times \overline{ac - b}}{c - d}}{c}$ se changera en $\frac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{\frac{c - d}{c}}$, ou $\frac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{cc - dc}$; mais au lieu de $d \times \overline{ac - b}$, on peut écrire $acd - bd$, et comme cette quantité doit être retranché de $bc - bd$, la quantité précédente $\frac{bc - bd - d \times \overline{ac - b}}{cc - dc}$ deviendra donc en réduisant $\frac{bc - dca}{c^2 - dc}$, qui, en divisant le numérateur et le dénominateur par

la même quantité c, devient enfin $\frac{b - da}{c - d}$ même valeur que ci-dessus.

LIV.

Application de la solution précédente à un exemple.

Pour faire présentement une application de la solution générale qu'on vient de trouver, supposons que le mixte soit composé d'or et d'argent (1), que son poids total soit de 30 onces, son volume de 3 pouces cubes, le poids du pouce cube d'or de $12\frac{2}{3}$ onces, celui du pouce cube d'argent de $6\frac{8}{9}$ onces, on aura $a = 3$, $b = 30$, $c = 12\frac{2}{3}$, $d = 6\frac{8}{9}$; substituant donc ces valeurs dans les deux formules générales $x = \frac{b - da}{c - d}$ et $y = \frac{ac - b}{c - d}$ elles deviendront $x = \frac{21}{13}$ et $y = \frac{18}{13}$, c'est-à-dire, que le mixte contiendra $\frac{21}{13}$ pouces cubes d'or et $\frac{18}{13}$ pouces cubes d'argent.

(1) Le Problème qu'Archimède eut à résoudre, lorsqu'on lui proposa de déterminer la quantité d'argent qui étoit alliée avec l'or dans la couronne du roi Hiéron, ne pouvoit pas être autre chose que celui qu'on vient de voir, aussitôt qu'il eut déterminé la pesanteur spécifique du métal de cette couronne, ce qu'il fit en examinant combien elle perdoit de son poids en la pesant dans l'eau.

LV.

On découvre aisément, par ce qu'on a vu dans le Problême précédent, que toutes les fois qu'on aura employé deux inconnues dans une question, il faudra deux équations pour les dégager ; et que lorsqu'on demande deux quantités dans un Problême, il faut aussi qu'on donne deux conditions pour les déterminer, afin qu'on puisse tirer de ces deux conditions les deux équations nécessaires. Pour montrer la manière d'employer ces conditions, nous donnerons encore le Problême suivant.

LVI.

Autre Problême, où l'on emploie deux inconnues.

Deux sources qui coulent chacune uniformément, ont rempli ensemble un réservoir a, *l'une en coulant pendant un tems* b, *l'autre pendant un tems* c ; *les deux mêmes sources ont rempli un autre réservoir* d, *la première coulant pendant le tems* e, *la seconde pendant le tems* f : *on demande la dépense de chacune de ces sources.*

Soient x et y ces dépenses, c'est-à-dire, par exemple, ce que chacune de ces deux sources fourniroit de muids d'eau par jour, en sup-

posant que les réservoirs a et d fussent mesurés en muids, pendant que les tems b, c, e, f, seroient comptés en jours.

On aura bx pour la quantité d'eau fournie par la première source pendant le tems b ; et de même cy pour la quantité d'eau fournie par la seconde source dans le tems c. Mais ces deux quantités d'eau par la première condition du Problême doivent être égales au réservoir a ; on a donc l'équation

$$bx + cy = a.$$

On aura de même ex, fy pour les quantités d'eau fournies par les mêmes sources pendant les tems e, f, et par conséquent la seconde condition donnera

$$ex + fy = d.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de ces deux équations les valeurs de x et de y, ce qui se fera, ainsi que dans le Problême précédent, en tirant une valeur de x en y de chacune de ces deux équations, et en les égalant ensuite.

La première sera $\frac{a - cy}{b}$, la seconde $\frac{d - fy}{e}$.

Egalant donc ces deux valeurs, on aura $\frac{a - cy}{b}$

$= \frac{d - fy}{e}$, ou $ae - cey = bd - bfy$.

ou $ae - bd = cey - bfy$, ou enfin

$$y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$$

Substituant cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes de x, dans $\frac{a - cy}{b}$ par exemple, il viendra $x = \frac{a - c \times \frac{ae - bd}{ce - bf}}{b}$

ou $x = \frac{a \times \overline{ce - bf} - c \times \overline{ae - bd}}{b \times \overline{ce - bf}}$

en mettant le premier terme a au même dénominateur que le second, et en multipliant les deux dénominateurs l'un par l'autre.

Faisant ensuite les multiplications indiquées dans cette valeur et réduisant, on aura

$$x = \frac{cd - af}{ce - bf}.$$

Il n'est donc plus question maintenant que d'avoir les valeurs particulières de a, b, c, d, e, f, pour les substituer dans ces deux valeurs générales de x et de y, afin d'en tirer telle solution particulière qu'on voudra.

Au lieu de commencer par dégager x dans les deux équations précédentes, et d'égaler les deux valeurs qu'elles donnent, afin d'avoir y, il est clair qu'on pouvoit également commencer par dégager y, en égalant ensuite ses deux différentes valeurs pour en tirer x, et que par cette opération on seroit parvenu nécessairement au même résultat.

LVII.

Exemple du Problême précédent en nombres.

Pour faire présentement quelque application de ce Problême, supposons que la première source ayant coulé deux jours, et la seconde trois, elles ayent rempli un réservoir de 195 muids. Ensuite la première source ayant coulé cinq jours, et la seconde quatre, elles ayent rempli un réservoir de 330 muids.

On aura donc $a = 195$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 330$, $e = 5$, $f = 4$, et par conséquent $dc - af = 210$, $ce - bf = 7$, $ae - db = 315$, d'où $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{210}{7} = 30$

et $y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{315}{7} = 45$; ainsi la première source, dans cet exemple, fournit 30 muids par jour, et la seconde 45.

LVIII.

Supposons présentement que la première source ayant coulé pendant 4 jours, et la seconde pendant 6 jours, elles ayent rempli un réservoir de 120 muids. Ensuite que la première ayant coulé 3 jours, et la seconde 7, elles ayent rempli un réservoir de 190 muids. Autre exemple

On aura, dans ce cas, $a = 120$, $b = 4$, $c = 6$, $d = 190$, $e = 3$, $f = 7$, et par conséquent $dc - af = 300$, $ce - bf = -10$, $ae - bd = -400$, ce qui donnera

$$x = \frac{dc - af}{ce - bf} = \frac{300}{-10}$$

$$\text{et } y = \frac{ae - bd}{ce - bf} = \frac{-400}{-10}.$$

La première fois qu'on aura trouvé de semblables valeurs, c'est-à-dire, des quantités négatives divisées par des quantités négatives, et des positives, divisées par des négatives, on aura dû être embarrassé à savoir ce qu'elles devoient signifier, et ceux qui auront craint de faire de mauvais argumens métaphysiques, auront cherché à reprendre la question d'un peu plus haut, afin d'éviter ces sortes de divisions : voici, par exemple, ce qu'on aura pu faire pour cela dans cette question-ci. Singularité de expressions où l'on arrive dan cet exemple.

Manière de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier.

On aura repris les deux équations générales $bx + cy = a$, et $ex + fy = d$, et substituant dans ces équations pour a, b, c, d, e, f, les valeurs que ces lettres ont dans cet exemple, on aura eu $4x + 6y = 120$, et $3x + 7y = 190$. Tirant de ces équations, $x = 30 - \frac{3y}{2}$, et $x = \frac{190}{3} - \frac{7}{3}y$, on aura égalé ces deux valeurs, ce qui aura donné

$$30 - \frac{3y}{2} \quad \frac{190}{3} - \frac{7y}{3},$$

ou $\frac{7}{3}y - \frac{3}{2}y = \frac{190}{3} - 30$, ou $y = 40$.

Substituant ensuite cette valeur de y dans $30 - \frac{3}{2}y$ valeur de x, on aura eu $x = 30 - 60$, c'est-à-dire, $x = -30$. Par cette voie, on aura vu, sans en pouvoir douter, que le quotient de -400 par -10 est $+40$, et que celui de $+300$ par -10 est -30.

LIX.

Théorèmes généraux concernant les signes des quotiens ou des produits.

On aura bientôt après regardé comme des principes généraux que

le + divisé par le + donnoit le +,
le + divisé par le — donnoit le —,
le — divisé par le + donnoit le —,
le — divisé par le — donnoit le +,

et de même pour la multiplication.

Ces principes auront été d'autant plus faciles à imaginer qu'on y étoit comme conduit, par les réflexions qu'on avoit dû faire sur les signes qu'on trouvoit aux termes des produits et des quotiens, en pratiquant les préceptes donnés pour la multiplication et pour la division des quantités complexes.

Mais s'il est facile qu'on se doute, pour ainsi dire, de ces principes, on sent bien aussi qu'on ne sauroit les affirmer qu'après y avoir fait beaucoup de réflexions, et il y a apparence que les premiers Analystes n'en auront été sûrs qu'après les avoir vérifiés dans beaucoup d'exemples.

LX.

On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$ quoique ces quantités ne soient précédées de rien.

Pour nous assurer que la multiplication de $-$ par $-$ doit toujours donner $+$ au produit, voyons quelle lumière nous pouvons tirer de la méthode générale des multiplications données, article XLV. Suivant cette méthode, on voit très-clairement que le produit d'une quantité telle que $a-b$ par une autre $c-d$, doit être $ac-bc-ad+bd$; et on voit par conséquent en même tems que le terme bd qui est venu par la multiplication de b et de d a le signe $+$, tandis que ses produisans b et d ont le signe $-$. Il ne reste donc plus qu'à savoir si lorsque deux quantités négatives telles que $-b$

et $-d$ ne seront précédées d'aucune quantité positive, leur produit sera encore $+bd$. Or, c'est ce dont il est facile de reconnoître la vérité, puisque la méthode par laquelle on a découvert que le produit de $a-b$ par $c-d$ étoit $ac-bc-ad+bd$, ne spécifiant aucune grandeur particulière ni à a ni à c, doit avoir encore lieu lorsque ces quantités sont égales à zéro : or, en ce cas, le produit $ac-bc-ad+bd$ se réduit à $+bd$; donc $-b\times-d=+bd$.

LXI.

Les autres cas se démontreroient de même.

Quant aux autres cas, c'est-à-dire, à la multiplication et à la division de $+$ par $-$, on les justifieroit de la même manière.

LXII.

Comment la valeur négative qu'on a trouvée résout le Problème.

Pour revenir présentement à notre dernière application du Problême précédent, remarquons qu'après avoir trouvé que $x=-30$ et $y=+40$, on a dû avoir encore une autre espèce d'embarras, c'étoit de savoir ce que signifioit cette valeur de x : pour le découvrir sûrement, le chemin qu'il est vraisemblable qu'on aura tenu, c'est de remonter aux conditions du Problême, ou, ce qui revient au même,

aux équations $4x+6y=120$ et $3x+7y=190$ qui les expriment alors, et de voir comment les valeurs -30 et $+40$ de x et de y conviennent à ces équations. On trouve, premièrement, que $4x$ doit être, en ce cas, -120 et que $6y$ est 240, d'où par conséquent $4x+6y$ est $-120+240$, qui est en effet égal à 120. On trouve de même que $3x+7y$ est $-90+280$ qui se réduit à 190.

Voyant donc comment les valeurs -30 et $+40$ de x et de y, satisfont aux équations $4x+6y=120$ et $3x+7y=190$, on découvre en même-tems comment elles satisfont aux conditions du Problême; car puisque l'usage que l'on fait des quantités $4x$ et $3x$, qui expriment alors les quantités d'eau dépensées par la première source, dans la première et dans la seconde opération, est de les retrancher de $6y$ et de $7y$, qui expriment les quantités d'eau fournies dans les mêmes opérations par la seconde source, il faut que dans ce cas, on regarde la première source, comme dérobant de l'eau aux réservoirs, au lieu d'en fournir, comme elle faisoit dans l'autre exemple, et comme on l'avoit supposé en exprimant les conditions du Problême.

L'on voit, en cette occasion, un exemple de la généralité de l'analyse, qui fait trouver

dans une question des cas que l'on n'avoit pas prévu d'abord pouvoir y être renfermés.

LXIII.

Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du Problême.

Dans presque toutes les questions résolues généralement, on a trouvé des cas de même nature que le précédent; et l'on en a toujours conclu, que lorsque la valeur de l'inconnue devenoit négative, la quantité qu'elle exprimoit devoit être prise dans un sens contraire à celui suivant lequel on l'avoit employée, en exprimant les conditions du Problême.

Il en est de même des connues.

Ce qu'on vient de dire des inconnues, se doit dire aussi des connues, c'est-à-dire, que dans les applications qu'on fera d'une solution générale, si on fait négatives quelques-unes des quantités données a, b, etc, dans les Problêmes, cela signifiera que dans l'application particulière, ces quantités doivent être prises dans un sens contraire à celui suivant lequel on les prenoit dans la solution générale.

LXIV.

Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives.

Qu'on se propose, par exemple, de trouver quelles doivent être, dans le Problême précédent, les dépenses des deux sources, pour que la seconde fournissant de l'eau pendant six jours,

tandis que la première en dérobe pendant trois jours, un réservoir de 180 muids soit rempli; et que la première source ensuite fournissant de l'eau pendant 3 jours, et la seconde pendant 4 jours, un réservoir de 320 muids soit rempli.

On n'aura qu'à faire dans la solution générale $a = 180$, $b = -3$, $c = 6$, $d = 320$, $e = 3$, $f = 4$.

Et l'on aura $dc = 1920$, $af = 720$, $ce = 18$, $bf = -12$, $ae = 540$, $db = -960$, et par conséquent $dc - af = 1200$, $ce - bf = 30$, $ae - db = 1500$, qui donnent $x = \frac{dc - af}{ce - bf} = 40$ et $y = \frac{ae - db}{ce - bf} = 50$, par lesquelles on apprend que la dépense de la première source est de 40 muids par jour, soit pour dérober comme elle fait dans la première opération, soit pour fournir, ainsi qu'il arrive dans la seconde; et que la dépense de la seconde est de 50 muids par jour qu'elle fournit dans chacune des deux opérations. Il étoit si naturel d'imaginer que b devoit être négatif dans cette application, et si aisé de s'en assurer en remontant à l'usage qu'on fait de cette lettre, en exprimant les conditions du Problême, qu'il est inutile de s'arrêter à le faire voir.

LXV.

Pour faciliter aux Commençans la maniére d'étendre les solutions des Problêmes aux cas où les quantités données sont prises dans un sens contraire à celui où elles avoient été prises d'abord, nous prendrons encore un exemple dans un autre Problême que le précédent ; nous reviendrons au Problême de l'art. XXIV, où il s'agit de trouver la rencontre de deux Courriers, et nous chercherons à tirer de la solution générale celle du cas suivant.

Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives.

Deux Courriers sont à la distance de 50 lieues, l'un étant, par exemple, à Lille, l'autre à Paris. Le premier part de Lille à 8 heures du soir pour aller à Paris en faisant 4 lieues par heure. Le second part le même jour de Paris à 11 heures du matin pour aller à Lille, et fait 3 lieues par heure ; on demande à quelle distance de Paris ils se rencontreront.

En comparant cet énoncé avec celui du Problême général, on voit d'abord que la lettre e, qui exprimoit la marche du premier Courrier dans un tems donné, doit être négative, puisque dans la solution générale on supposoit que le premier Courrier s'éloignoit, et qu'il vient, dans ce cas-ci, au devant du second. On voit ensuite que la lettre b, qui exprimoit le nombre

d'heures d'avance du premier Courrier, doit être aussi négative, puisqu'il est parti plus tard.

Ainsi on n'aura qu'à faire dans la formule générale $x = \frac{ade+bce}{de-cf}$, $a = 50$, $b = -9$ $c = -4$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 1$, et l'on aura

$$x = \frac{50\times 1\times 3 - 9\times -4\times 3}{1\times 3+4\times 1}$$

$$= \frac{150+108}{3+4} = \frac{258}{7} = 36\tfrac{6}{7}$$ qui apprend que lorsque le Courrier de Paris aura fait $36\frac{6}{7}$ lieues, il aura joint celui de Lille.

LXVI.

Un des usages les plus étendus de l'Algébre et qui montre le mieux l'avantage qu'on a de prendre à volonté, ainsi qu'on vient de faire, les signes des quantités données en général dans les Problêmes, c'est de rapporter à la solution des équations qu'on a prises généralement, toutes celles dans lesquelles les inconnues sont disposées de la même manière, mais avec des signes et des coefficiens quelconques. Par exemple, avec les deux équations $bx + cy = a$ et $ex + fy = d$ qu'on a résolues dans l'art. LVI, on résoudra toujours deux équations du premier degré quelles qu'elles soient, pourvu qu'elles ne renferment que deux inconnues.

Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes.

Exemple. Qu'on ait, par exemple, à résoudre les deux équations $mnx = ppy - hhg$ et $mny = p^3 - nnx$. Pour les comparer aux premières, on commencera par les écrire ainsi :

$mnx - p^2y = -hhg$ et $nnx + mny = p^3$,

les comparant alors terme à terme avec les deux équations.

$$bx + cy = a \text{ et } ex + fy = d,$$

la première avec la première, et la seconde avec la seconde, on aura

$b = mn$, $c = -p^2$, $a = -hhg$, $e = n^2$, $f = mn$, $d = p^3$.

Ce qui donnera

$cd = -p^5$, $af = -mnhhg$, $ce = -p^2n^2$, $bf = mmnn$, $ae = -h^2n^2g$, $bd = mnp^3$, et par conséquent $cd - af = -p^5 + mnhhg$, $ce - bf = -m^2n^2 - p^2n^2$, $ae - bd = -h^2n^2g - mnp^3$.

Or, substituant ces valeurs dans les formules générales $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$ et $y = \frac{ae - bd}{ce - bf}$,

on aura enfin. . . . . $x = \frac{p^5 - mnh^2g}{m^2n^2 + p^2n^2}$

et $y = \frac{h^2gn^2 + mnp^3}{m^2n^2 + p^2n^2}$.

LXVII.

Supposons présentement qu'on ait les équations Autre exemple.

$$\frac{3mpx}{p-q} = \frac{ppy}{p+q} - \frac{2nq}{p-q}$$

et $mx+\overline{p+q}\times y=\frac{nq}{p-q}$; en mettant la première sous cette forme. . . . . .

$$\frac{3mpx}{p-q} - \frac{ppy}{p+q} = -\frac{2nq}{p-q},$$

on aura, en la comparant à l'équation générale, $bx+cy=a$, $b=\frac{3mp}{p-q}$, $c=-\frac{pp}{p+q}$, $a=-\frac{2nq}{p-q}$, et en comparant la seconde à l'équation $ex+fy=d$, on aura

$$e=m, f=p+q, d=\frac{nq}{p-q},$$

et ces valeurs étant substituées dans la formule $x=\frac{cd-af}{ce-bf}$, donneront . . . . . .

$$x=\frac{-\frac{pp}{p+q}\times\frac{nq}{p-q}+\frac{2nq}{p-q}\times\overline{p+q}}{-\frac{pp}{p+q}\times m-\frac{3mp}{p-q}\times\overline{p+q}}.$$

Pour réduire cette quantité, je commence par multiplier le nnmérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{2nq \times \overline{p+q}}{p-q}$ par $p+q$, ce qui la change en $\frac{2nq \times \overline{p+q}^2}{p-q \times p+q}$, par ce moyen le numérateur entier de la valeur de x devient $\frac{-pp \times qn + 2nq \times \overline{p+q}^2}{p-q \times p+q}$,

ou $\frac{qn \times 2 \times p+q-pp}{p-q \times p+q}$,

ou $qn \times \frac{pp+4pq+2qq}{p-q \times p+q}$.

Je travaille ensuite sur le dénominateur de la valeur de x, en mettant ses deux parties au même dénominateur, ce qui donne

$$\frac{-p^2 \times p-q \times m-3mp \times \overline{p+q}^2}{p+q \times p-q},$$

ou $\frac{-mp \times pp-pq+3 \times \overline{p+q}^2}{p+q \times p-q}$, ou enfin

$$\frac{-mp \times 4pp+5pq+3qq}{p+q \times p-q}.$$

Ces

Ces deux opérations changent la valeur précédente de x en $\dfrac{qn \times \frac{pp+4pq+2qq}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}}{-mp \times \frac{4pp+5pq+3qq}{\overline{p+q} \times \overline{p-q}}}$;

mais comme le numérateur et le dénominateur de cette fraction sont chacun divisés par $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$, j'ôte ce diviseur, et la valeur de x devient

$$\frac{qn \times \overline{pp+4pq+2qq}}{-mp \times \overline{4pp+5pq+3qq}},$$

ou $-\dfrac{qn \times \overline{pp+4pq+2qq}}{mp \times \overline{4pp+5pq+3qq}}$, ou

$-\dfrac{qn}{mp} \times \dfrac{pp+4pq+2qq}{4pp+5pq+3qq}$, ou enfin

$$x = \frac{-nqpp-4pqqn-2nq^3}{4mp^3+5mp^2q+3mpqq}$$

substituant maintenant les mêmes valeurs de a, b, c, etc. dans la formule générale. . . . .

$y = \dfrac{ae-bd}{ce-bf}$, on aura. . . . . .

$$y = \frac{-\frac{2nq}{p-q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \frac{nq}{p-q}}{-\frac{pp}{p+q} \times m - \frac{3mp}{p-q} \times \overline{p+q}}$$

au numérateur de laquelle je donne cette forme

$$\frac{-2mnq\times(p-q)-3mpqn}{\overline{p-q}^{2}}$$

en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction $-\frac{2nqm}{p-q}$ par $p-q$. Je réduis ensuite cette nouvelle forme, et elle devient $\frac{mnq\times-5p+2q}{\overline{p-q}^{2}}$.

Quant au dénominateur de la valeur de y, comme il est le même que celui de la valeur de x, il se réduira de même, et l'on aura partant

$$y=\frac{mnq\times\frac{2q-5p}{\overline{p-q}^{2}}}{-mp\times\frac{4pp+5pq+3qq}{\overline{p+q}\times\overline{p-q}}};$$

ou en effaçant les diviseurs communs $p-q$, et en réduisant. . . . . .

$$y=\frac{qn\times\frac{5p-2q}{p-q}}{p\times\frac{4pp+5pq+3qq}{p+q}}$$ qui,

en faisant passer le diviseur $p+q$ en haut,

et le diviseur $p - q$ en bas, suivant les règles des divisions des fractions, devient enfin

$$y = \frac{qn \times \overline{p+q} \times \overline{5p-2q}}{p \times \overline{p-q} \times \overline{4p^2+5pq+3qq}},$$

ou $y = \dfrac{-2q^3n+5p^2qn+3pq^2n}{-2p^2q^2+4p^4+p^3q-3pq^3}$.

LXVIII.

Autre manière de résoudre le même exemple.

Si pour résoudre les équations proposées dans cet exemple, on avoit commencé par délivrer de fractions ces équations, le calcul qu'on auroit fait de la manière suivante, auroit donné moins d'embarras de la part des diviseurs.

Soient multipliés d'abord les deux membres de l'équation $\dfrac{3mpx}{p-q} = \dfrac{ppy}{p+q} - \dfrac{2qn}{p-q}$, ou $\dfrac{3mpx}{p-q} - \dfrac{ppy}{p+q} = -\dfrac{2nq}{p-q}$ par $pp-qq$ produit des deux diviseurs $p-q$, $p+q$, et l'on aura l'équation $\overline{3mpp+3mpq} \times x + \overline{ppq-p^3} \times y = -2npq-2nqq$

Soient multipliés de même les deux membres de l'équation $mx + \overline{p+q} \times y = \dfrac{nq}{p-q}$ par $p-q$, et l'on aura $\overline{mp-mq} \times x + \overline{pp-qq} \times y = qn$.

Comparant présentement ces deux nouvelles équations avec les deux formules générales, on a $b = 3mpp + 3mpq$, $c = ppq - p^3$, $a = -2npq - 2nq^2$, $e = mp - mq$, $f = p^2 - q^2$, $d = qn$.

D'où l'on tire $cd = p^2q^2n - p^3qn$, $af = -2np^3q - 2np^2q^2 + 2pq^3n + 2nq^4$, $ae = 2nmq^3 - 2nmp^2q$, $bd = 3mnp^2q + 3mnpq^2$, $ce = 2p^3qm - mp^4 - mp^2q^2$, $bf = 3mp^3q + 3mp^4 - 3mpq^3 - 3mp^2q^2$

et partant. . . . . .

$cd - af = qnp^3 + 3p^2q^2n - 2npq^3 - 2nq^4$

$ce - bf = 2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$

$ae - bd = 2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpq^2$

qui donnent . . . . . .

$$x = \frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3} \text{ et}$$

$$y = \frac{2nmq^3 - 5mnp^2q - 3mnpqq}{2mppqq - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}.$$

LXIX.

Comparaison des deux solutions précédentes.

Si on compare présentement ces deux valeurs de x et de y avec celles qu'on avoit trouvées précédemment, on voit d'abord sans aucune difficulté, l'identité des deux valeurs de y. Quant aux valeurs de x, pour savoir comment

la première peut être la même chose que la seconde, il faut remarquer que l'égalité qui doit être entre ces deux expressions, suppose nécessairement que le numérateur $qnp^3 + 3npp\,qq - 2npq^3 - 2nq^4$ de la seconde contienne le numérateur $- qnpp - 4pq^2n - 2q^3n$ de la première, de la même manière que le dénominateur $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$ de la seconde contient le dénominateur $4p^3m + 5p^2qm + 3mpq^2$ de la première. Or, prenant la peine de diviser le second numérateur par le premier, on trouve en effet le même quotient $p - q$ qu'en divisant le second dénominateur par le premier. C'est-à-dire, que l'expression. . . . . .

$$\frac{qnp^3 + 3ppqqn - 2npq^3 - 2nq^4}{2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3}$$

se change en. . . . . .

$$\frac{p - q \times -nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{p - q \times 4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$$

ou en $\frac{-nqpp - 4pqqn - 2nq^3}{4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2}$ en ôtant les diviseurs communs $p - q$.

LXX.

La manière dont on vient de réduire la plus composée des deux valeurs de x à la plus simple,

étoit aisée à imaginer, lorsqu'on avoit l'une et l'autre de ces deux expressions ; mais si on n'eût connu que la plus composée et qu'on eût voulu la simplifier, on auroit été beaucoup plus embarrassé, puisqu'on n'auroit pas su par quelle quantité il falloit diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction. Or comme ce seroit un vice dans la solution d'un Problême qu'une quantité réductible et non réduite, il faut chercher une méthode pour réduire toute fraction qui peut se simplifier, ou, ce qui revient au même, il faut chercher une méthode pour trouver quel est le plus grand diviseur commun que puissent avoir deux quantités données.

Supposons d'abord, pour aller du plus simple au plus composé, que ces deux quantités ne soient que des nombres ; que l'on ait, par exemple, à chercher le plus grand diviseur commun des nombres 637 et 143, ou, ce qui revient au même, que l'on se propose de réduire la fraction $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Divisant d'abord 637 par 143, il vient 4 pour quotient, et 65 pour reste, c'est-à-dire, que la fraction $\frac{637}{143}$ se change en $4 + \frac{65}{143}$, d'où la question est réduite à abbaisser la fraction $\frac{65}{143}$, ou, ce qui revient au même, à chercher le nombre qui est le plus grand commun diviseur des nombres 143 et 65. Car lorsque ce nombre sera

trouvé, il est évident qu'il sera aussi le plus grand commun diviseur des nombres 637 et 143, puisqu'on ne sauroit réduire la fraction $\frac{65}{143}$ à sa plus simple expression, qu'on ne réduise en même tems $4+\frac{65}{143}$, ou $\frac{637}{143}$ à sa plus simple expression.

Les deux nombres 143 et 65, sur lesquels il s'agit d'opérer présentement, étant plus simples que les deux premiers 637 et 143, je vois que la difficulté est diminuée, et qu'en s'y prenant de la même manière, on la diminuera encore. Au lieu de la fraction $\frac{65}{143}$ à réduire, j'écris $\frac{143}{65}$, non que je prétende que ces fractions soient les mêmes; mais parce qu'on ne sauroit réduire l'une, que l'autre ne se réduise de la même manière. Ensuite, pour réduire $\frac{143}{65}$, je divise 143 par 65, ce qui me donne 2 pour quotient, et 13 pour le reste. Il ne faut donc plus, par le même principe, que chercher le plus grand commun diviseur de 13 et de 65.

Car on voit que le plus grand commun diviseur de ces deux nombres sera aussi celui de 143 et de 65, à cause que la fraction $\frac{143}{65}$ se change en $2+\frac{13}{65}$.

Présentement le plus grand commun diviseur de 13 et de 65 est 13 lui-même, puisqu'il divise exactement 65. Donc 13 est aussi le plus grand commun diviseur de 143 et de 65, donc

il est aussi celui des nombres proposés 637, 143. En effet, 637 est 49 × 13 et 143, 11 × 13, d'où l'on tire $\frac{637}{143} = \frac{49}{11}$, fraction irréductible.

LXXI.

Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres.

On peut s'assurer facilement que la méthode qu'on vient de suivre dans l'exemple précédent, peut s'appliquer à quelques nombres que ce soit. Qu'on ait, en général, deux nombres A et B, et que le quotient de la division du premier par le second soit a, et le reste C, la question sera réduite à trouver le plus grand commun diviseur de B et de C; b étant supposé alors le quotient de B par C, et D le reste, il ne s'agira plus que de trouver le plus grand commun diviseur de C et de D, c'est-à-dire, de diviser C par D, et de se servir du reste pour diviser D. Allant ainsi de division en division jusqu'à ce qu'on arrive à deux nombres, dont le plus petit soit contenu exactement dans le plus grand; ce nombre contenu exactement, sera le plus grand diviseur commun des deux premiers nombres A et B.

Cette règle dans toute sa généralité, comme dans l'exemple précédent, est fondée sur ce que la fraction $\frac{A}{B}$ devenant $a + \frac{C}{B}$ ne s'auroit s'abbaisser que lorsque $\frac{C}{B}$ s'abbaisse, que $\frac{C}{B}$ ne

sauroit se réduire que de la même manière que $\frac{B}{C}$, et que $\frac{B}{C}$ étant $b + \frac{D}{C}$ ne sauroit se réduire sans que $\frac{D}{C}$ se réduise, et ainsi de suite.

LXXII.

Voyons présentement quels sont les changemens qu'il faut faire à cette méthode pour l'appliquer aux quantités algébriques ; et pour plus de clarté, prenons d'abord un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de trouver le plus grand commun diviseur des quantités $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ et $4aa - 5ba + bb$. Il faudroit, suivant la méthode précédente, diviser la première de ces deux quantités par la seconde ; mais comme la division ne sauroit se faire à cause que le premier terme $3a^3$ du dividende ne contient pas exactement le premier terme du diviseur, je multiplie toute la première quantité par 4, et je remarque que 4 n'étant point un des diviseurs de la seconde quantité $4aa - 5ba + bb$, il ne peut pas y avoir d'autre plus grand commun diviseur entre $12a^3 - 12baa + 4bba - 4b^3$ et $4aa - 5ba + bb$ qu'entre $3a^3 - 3baa + bba - b^3$ et $4aa - 5ba + bb$.

Je divise alors, suivant les règles précé-

dentes, $12a^3 - 12ba^2 + 4b^2a - 4b^3$ par $4a^2 - 5ba + bb$; j'ai pour quotient $3a$, et pour reste $3baa + bba - 4b^3$, ce qui, suivant les mêmes règles, demanderoit qu'on divisât $4a^2 - 5ba + bb$ par $3baa + bba - 4b^3$; mais comme la division de ces quantités ne sauroit se faire sans les préparer auparavant, je remarque d'abord que b étant commun à tous les termes de la dernière quantité, et ne l'étant pas à ceux de la seconde, il ne sauroit faire partie du plus grand commun diviseur de ces quantités, ainsi je l'ôte de tous les termes de cette seconde quantité, et je prends à la place $3aa + ba - 4b^2$. Je remarque ensuite qu'en multipliant la première quantité $4aa - 5ba + bb$ par 3, qui n'est point un diviseur de $3aa + ba - 4b^2$, la division sera possible ; je fais donc cette division de $12aa - 15ab + 3bb$ par $3aa + ba - 4bb$, ce qui me donne 4 pour quotient, et pour reste $-19ab + 19bb$.

Il n'est donc plus question présentement que de trouver le plus grand commun diviseur de $3aa + ba - 4bb$, et de $-19ab + 19bb$. Comme il faudroit, pour cette opération, diviser la première de ces deux quantités par la seconde, et que pour pouvoir diviser les deux premiers termes de ces quantités, il faudroit multi-

plier la première par $19b$, qui est un diviseur exact de la seconde, j'ôte ce diviseur de la seconde, ce qui la réduit à $-a+b$.

Mais le plus grand commun diviseur de $3aa+ba-4bb$ et de $-a+b$, est $-a+b$ lui-même, puisque la division de ces deux quantités se fait exactement. Donc $-a+b$ est le plus grand commun diviseur de $3aa+ba-4bb$ et de $-19ab+19bb$; donc il est aussi le plus grand commun diviseur de $12aa-15ab+3bb$ et de $3aa+ba-4bb$; donc il l'est encore de $4aa-5ba+bb$, et de $3baa+bba-4b^3$ aussi bien que de $12a^3-12baa+4bba-4b^3$ et de $4aa-5ba+bb$. Donc il est enfin le plus grand diviseur commun des quantités proposées $3a^3-3baa+bba-b^3$ et $4aa-5ba+bb$.

LXXIII.

Il n'est pas difficile maintenant de voir qu'on réussiroit à peu près de la même manière, quelles que fussent les quantités dont on voulût trouver les plus grands communs diviseurs. Le seul principe qu'on soit obligé d'ajouter dans cette recherche, à la méthode de l'art LXXI, c'est que deux quantités quelconques A et B conserveront leur plus grand commun diviseur, si on multiplie ou divise l'une de ces deux quan-

tités, A, par exemple, par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec B.

Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités algébriques.

On peut énoncer ainsi le procédé de la méthode générale de déterminer les plus grands communs diviseurs. Soient A et B les deux quantités proposées, on commencera par ordonner ces deux quantités par rapport à une des lettres quelconques qu'elles ont de commun. On verra ensuite par quelle quantité m il faudroit multiplier A, pour que les termes affectés de la plus haute puissance de la lettre suivant laquelle on l'a ordonnée, puissent se diviser par les termes de B affectés de la plus haute puissance de la même lettre ; si ce multiplicateur m n'a aucun commun diviseur avec B, on s'en servira pour multiplier A ; mais s'il a un commun diviseur n, on ôtera ce commun diviseur tant de m que de B, et on ne multipliera A que par $\frac{m}{n}$, ce qui formera une nouvelle quantité C que l'on prendra à la place de A. On prendra de même à la place de B la quantité D qui en vient, lorsqu'on l'a divisé par le diviseur n qu'il a de commun avec m.

Cela fait, on divisera C par D, et la division faite, si elle est exacte, D sera le plus grand commun diviseur cherché de A et de B ; mais s'il y a un reste E, on fera, à l'égard de D et

de E la même opération qu'à l'égard de A et de B, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à deux quantités qui se divisent exactement. Lorsqu'on y sera parvenu, celle de ces deux quantités qui sera contenue exactement dans l'autre, sera le plus grand commun diviseur cherché.

Il est bon de faire remarquer que si, avant d'entreprendre l'opération dont on vient de voir la méthode, on apperçoit dans l'une des quantités proposées A ou B quelque quantité qui en soit un diviseur exact, et qui ne le soit point de l'autre, il faudra commencer par ôter ce diviseur pour que le calcul soit plus simple.

Afin que les Commençans puissent acquérir quelque facilité dans l'application de cette méthode, j'ai joint les exemples suivans.

LXXIV.

Premier exemple.

Soient les quantités $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$ et $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$, dans lesquelles nous n'avons trouvé (art. LXIX.) le diviseur commun $p - q$, que parce que nous savions d'avance que la première de ces deux quantités, divisée par la seconde, devoit donner le même quotient que la quantité $-nqp^2 - 4pq^2n - 2nq^3$ divisée par $4mp^3 + 5mp^2q + 3mpq^2$.

Pour réduire présentement ces deux quantités, sans employer autre chose que la méthode précédente, on commencera par ôter qn qui est commun à tous les termes de la première de ces deux quantités, et qui n'est point contenu dans la seconde; on ôtera de même pm qui est commun à tous les termes de la seconde, sans être contenu dans la première; et par-là l'opération sera réduite à trouver le plus grand diviseur commun des quantités $(A) -4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$ et $(B) p^3 + 3ppq - 2pq^2 - 2q^3$.

Divisant A par B, j'ai -4 pour quotient, et pour reste (C) $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$, comme il faudroit alors multiplier B par $11q$, pour que son premier terme pût être divisé par le premier terme de C, et que q est contenu dans tous les termes de C, je multiplie simplement B par 11, et je divise C par q, d'où je n'ai plus à comparer que les deux quantités (D) $11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22q^3$, et (E) $11p^2 - 6pq - 5q^2$.

Je divise la première par la seconde, et j'ai pour quotient p et pour reste $(F) 39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$. Comme il faudroit alors multiplier (E) par $39q$, afin que son premier terme fut divisible par celui de cette nouvelle quantité F, et que q est commun à tous les termes de F, je ne multiplie donc E que par 39, et je divise

son produit (*G*) $429\,p^2 - 234\,pq - 195\,q^2$ par (*H*) $39\,p^2 - 17\,pq - 22\,q^2$. Le quotient est 11, et le reste (*I*) $-47\,pq + 47\,q^2$.

Pour diviser alors *H* par *I*, il faudroit multiplier tous ses termes par $47\,q$; mais cette quantité est un diviseur de *H*, je l'ôte donc de *H* et il me reste $q - p$ pour servir de diviseur à $39\,p^2 - 17\,pq - 22\,q^2$. Or, la division se fait exactement; donc $q - p$ est le plus grand diviseur commun cherché des quantités proposées.

LXXV.

Soient proposées présentement les deux quantités $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ et $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$, ordonnant ces deux quantités par rapport à a, j'ai $2aa + ba - ca - 3bb - 4bc - cc$ et $2aa + 9ca - 5ba - 12bb + 8bc + 4cc$, ou (*A*) $2aa + \overline{b - c} \times a - 3bb - 4bc - cc$ et (*B*) $2aa + \overline{9c - 5b} \times a - 12bb + 8bc + 4cc$. Second exemple.

Divisant la première par la seconde, j'ai 1 pour quotient, et pour reste (*C*) $\overline{6b - 10c} \times a + 9bb - 12bc - 5cc$. Pour diviser *B* par cette quantité, je vois qu'il faudroit auparavant la multiplier par $3b - 5c$.

Mais avant d'en faire l'opération, je tente la division de C par $3b - 5c$, elle réussit, et donne pour quotient $(D)\ 2a + 3b + c$; je n'ai donc plus qu'à chercher le plus grand commun diviseur de B et de D; mais B est divisible exactement par D; donc D, ou $2a + 3b + c$, est le plus grand commun diviseur cherché de $ab + 2aa - 3bb - 4bc - ac - cc$ et de $9ac + 2aa - 5ab + 4cc + 8bc - 12bb$. En effet, la première de ces deux quantités est le produit de $2a + 3b + c$, par $a - b - c$, la seconde le produit de $2a + 3b + c$ par $a - 4b + 4c$, et ces deux quantités $a - b - c$ et $a - 4b + 4c$ n'ont plus aucun commun diviseur.

LXXVI.

Troisième exemple.

Soient les deux quantités $(A)\ \overline{dd - cc} \times a^2 + c^4 - ddcc$ et $(B)\ 4da^2 - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ ordonnées par rapport à a. Je change d'abord B en $(C)\ 2da^2 - \overline{cc + 2cd} \times a + c^3$, en ôtant de tous ses termes le diviseur 2 qui n'est pas commun avec A. Je multiplie ensuite A par $2d$, afin de rendre la division possible, ce qui me donne pour quotient $dd - cc$ et pour reste $(D)\ \overline{dd - cc} \times$

$\overline{cc + 2cd} \times a - \overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, si on vouloit alors que cette quantité servît de diviseur à C, il faudroit multiplier auparavant C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$, afin que son premier terme permît la division.

Mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ ne seroit point ou un diviseur, ou un multiple de quelque diviseur de D. Pour le savoir, je cherche le plus grand commun diviseur de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2cd}$ et de $-\overline{dd - cc} \times c^3 + 2dc^4 - 2d^3cc$, c'est-à-dire, de $ddcc - c^4 + 2cd^3 - 2c^3d$ et de $-ddc^3 + c^5 + 2dc^4 - 2d^3cc$; mais je vois tout de suite que la seconde de ces quantités n'est autre chose que le produit de la première par $-c$, et partant que la quantité D se réduit au produit de $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$ par $a - c$; donc au lieu de multiplier C par $\overline{dd - cc} \times \overline{cc + 2dc}$, je divise D par cette quantité, et il vient (E) $a - c$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec C; or $a - c$ divise exactement C, donc $a - c$ est le plus grand diviseur cherché.

LXXVII.

Au reste, avec un peu d'habitude dans le cal-

cul, on découvre souvent le plus grand commun diviseur de deux quantités plus facilement que par la méthode générale qu'on vient d'expliquer. Par exemple, les deux quantités précédentes $\overline{dd-cc} \times aa + c^4 - ddcc$ et $4daa - \overline{2cc + 4cd} \times a + 2c^3$ étant ordonnées par rapport à d, et par conséquent étant sous cette forme $\overline{aa-cc} \times dd + c^4 - aacc$ et $\overline{4aa - 4ac} \times d + 2c^3 - 2c^2a$, il est aisé de découvrir que $aa - cc$ est un diviseur de la première, et $c - a$ un diviseur de la seconde. Mais $aa - cc$ est divisible par $c - a$, donc $c - a$ est un diviseur des deux quantités proposées ; je les divise donc l'une et l'autre par $c - a$, et j'ai pour leurs quotiens $\overline{cc-dd} \times \overline{c+a}$, et $4ad + 2cc$ qu'on voit assez facilement n'avoir plus de commun diviseur. Donc $c - a$, ou $a - c$ étoit le plus grand commun diviseur des quantités proposées.

Autre manière de résoudre le même exemple.

LXXVIII.

Qu'on se propose maintenant de chercher le plus grand commun diviseur des deux quantités $6a^5 + 15a^4b - 4a^3cc - 10aabcc$ et $9a^3b - 27aabc - 6abcc + 18bc^3$, je commence par ôter aa de tous les termes de la

Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur sans la méthode précédente.

première, et $3b$ de tous ceux de la seconde. J'ai alors $6a^3 + 15a^2b - 4acc - 10bcc$ et $3a^3 - 9aac - 2acc + 6c^3$; mais comme la seconde de ces deux quantités ne contient aucun b, je conclus que si elle a un commun diviseur avec la première, il faut qu'elle l'ait séparément avec ses deux parties $6a^3 - 4acc$ et $15a^2b - 10bcc$, et que ces deux parties doivent aussi avoir entre elles le même commun diviseur. Or, on voit tout de suite que $3aa - 2cc$ est le diviseur commun de ces deux parties, donc il est le plus grand commun diviseur des quantités proposées, si elles en ont un. Le prenant donc pour diviser ces deux quantités, on voit qu'en effet il les divise, et qu'il est par conséquent leur plus grand commun diviseur.

LXXIX.

Lorsqu'il y a trois inconnues dans un problème, il faut trois équations pour le résoudre.

On a vu suffisamment, par ce qui précède, que pour trouver les deux inconnues que renferme un problême, il faut avoir deux équations. Il n'est pas difficile d'imaginer en partant de-là, que lorsqu'il y aura trois inconnues dans un problême, il faudra trois équations, et ainsi de suite. Quant à la manière de dégager les inconnues de ces équations, elle ne sera pas difficile non plus à imaginer, après ce qu'on

a vu pour celles qui ne renferment que deux inconnues. Car qu'on ait trois équations contenant chacune les trois inconnues x, y, z; si on tire la valeur de x de chacune de ces équations exprimée par le moyen des connues et des deux autres inconnues y, z, de ces équations, il est évident qu'en égalant les unes aux autres ces différentes valeurs de x, on aura deux nouvelles équations qui ne contiendront plus que les deux inconnues y et z, et qui seront par conséquent dans le cas de celles dont nous venons de parler. Il en seroit de même des équations à quatre, cinq, etc. inconnues.

Comment on dégage les inconnues de ces équations.

Comme la méthode générale qu'on vient d'expliquer, peut offrir des difficultés lorsque l'on en fait usage, nous allons en montrer l'application dans le problême suivant, qui renfermera la plus grande complication que peuvent avoir les équations du premier degré à trois inconnues.

LXXX.

Problême dans lequel on emploie trois inconnues.

On sait ce que trois magasins, contenant chacun trois sortes de denrées, ont coûté les uns et les autres séparément; on sait de plus le nombre de mesures que chaque magasin contient de ces trois différentes

denrées ; on demande à combien revient une mesure de chaque denrée.

Soient a, b, c, les nombres de mesures de chaque denrée contenue dans le premier magasin, soit d le prix de ce magasin.

Soient de plus e, f, g, les mesures des mêmes denrées contenues dans le second magasin dont le prix est supposé h.

Soient encore i, k, l, les mesures des mêmes denrées contenues dans le troisième magasin, dont le prix est supposé m.

Soient enfin x, y, z, ce que coûte une mesure de chaque denrée.

Il est évident que la quantité de la première denrée contenue dans le magasin d coûtera ax, puisque a est le nombre des mesures de cette denrée, et x le prix de la mesure de cette denrée. De même la quantité de la seconde denrée contenue dans le même magasin, coûtera by, et la quantité de la troisième denrée contenue dans le même magasin coûtera cz. Ajoutant donc ces trois sommes pour les égaler au prix d de ce magasin, on aura l'équation

$$ax + by + cz = d;$$

on formera de même les équations

$ex + fy + gz = h$, $ix + ky + lz = m$

en exprimant les conditions mentionnées pour les deux autres magasins.

Il est question maintenant de tirer de ces équations les valeurs de x, y, z. Dans cette vue on tirera d'abord la valeur de x de la première équation, qui sera $\frac{d-by-cz}{a}$, et égalant cette valeur de x à celle qu'on tire de la seconde équation, on aura l'équation

$$\frac{d-by-cz}{a} = \frac{h-fy-gz}{e},$$

Egalant ensuite la même valeur $\frac{d-by-cz}{a}$ à celle qu'on tire de la troisième équation, on aura l'équation

$$\frac{d-by-cz}{a} = \frac{m-ky-lz}{i}.$$

De la première de ces deux équations entre y et z, on tirera

$$de-bey-cez = ah-afy-agz,$$

$$\text{ou } z = \frac{de-ah+afy-bey}{ce-ag}.$$

De la seconde on tirera

$$di-biy-icz = am-aky-alz,$$

$$\text{ou } z = \frac{di-am+aky-biy}{ci-al}.$$

En égalant ces deux valeurs de z, il est clair qu'on auroit une équation où il n'entreroit plus d'autre inconnue que y, et qu'en résolvant cette

équation on connoîtroit y. Comme les calculs que l'on auroit par cette opération seroient assez considérables, je vais faire voir la manière de les éviter en employant quelques abbréviations, que les premiers analystes, qui ont eu de grands calculs à faire, ont aisément imaginées.

LXXXI.

Ces abbréviations consistent à mettre de nouvelles lettres à la place de plusieurs termes composés de connues.

Manière d'abréger les calculs par des dénominations particulières.

Au lieu de. . . . $de - ah$ je mettrai. . . α
de. . . . $af - bg$ . . . . . β
de. . . . $ce - ag$ . . . . . γ
de. . . . $di - am$. . . . . δ
de. . . . $ak - bi$ . . . . . ε
de. . . . $ci - al$ . . . . . φ

Par ces nouvelles dénominations les équations précédentes deviendront $z = \frac{\alpha + \beta y}{\gamma}$ et $z = \frac{\delta + \varepsilon y}{\varphi}$ lesquelles donneront $\alpha\varphi + \beta\varphi y = \delta\gamma + \gamma\varepsilon y$ d'où l'on tire $y = \frac{\alpha\varphi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\varphi}$; substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des deux valeurs précédentes

de z, dans la première, par exemple, on aura

$$z = \frac{\alpha + \frac{\beta\alpha\phi - \beta\gamma\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}}{\gamma}$$

qui se réduit à $z = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}$.

Cela fait, on mettra ces valeurs de y et de z dans l'une des valeurs précédentes de x, dans $\frac{d - cz - by}{a}$ par exemple, et l'on aura

$$x = \frac{d}{a} - \frac{c}{a} \times \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\gamma\varepsilon - \beta\phi} - \frac{b}{a} \times \frac{\alpha\phi - \delta\gamma}{\gamma\varepsilon - \beta\phi}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{d \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi} + c \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} - b \times \overline{\alpha\phi - \delta\gamma}}{a \times \overline{\gamma\varepsilon - \beta\phi}}.$$

LXXXII.

Exemple du problème précédent en nombres.

Pour montrer présentement l'application de cette méthode, supposons que le premier magasin contienne 30 mesures de seigle, 20 d'orge et 10 de froment, et qu'il ait coûté 230$^{\#}$.

Que le second magasin contienne 15 mesures de seigle, 6 d'orge et 12 de froment, et qu'il ait coûté 138$^{\#}$.

Que le troisième magasin contienne 10 mesures de seigle, 5 d'orge, 4 de froment, et qu'il ait coûté 75$^{\#}$. Pour savoir à combien revient la

mesure de seigle, celle d'orge et celle de froment, il faudra faire

$a = 30$, $b = 20$, $c = 10$, $d = 230$, $e = 15$, $f = 6$, $g = 12$, $h = 138$, $i = 10$, $k = 5$, $l = 4$, $m = 75$, ce qui donnera $de - ah = \alpha = -690$, $af - be = \beta = -120$, $ce - ag = \gamma = -210$, $di - am = \delta = 50$, $ak - bi = \varepsilon = -50$, $ci - al = \varphi = -20$,

substituant ensuite ces valeurs dans les quantités

$$\alpha\varphi - \gamma\delta, \quad \gamma\varepsilon - \beta\varphi, \quad \alpha\varepsilon - \beta\delta,$$

on aura 24300, 8100, 40500 pour ces trois quantités, ce qui donnera par conséquent $y = \frac{24300}{8100} = 3$, $z = \frac{40500}{8100} = 5$, et

$$x = \frac{230 \times 8100 - 10 \times 40500 - 20 \times 24300}{30 \times 8100} = 4.$$

Ainsi le prix de la mesure de seigle est de $4^{\#}$.
Celui de la mesure d'orge de. . . . . $3^{\#}$.
Et celui de la mesure de froment de. . . $5^{\#}$.

LXXXIII.

Tous les problèmes du premier dégré a trois inconnues peuvent, étant mis en équations, être compris dans le problème précédent.

Comme les équations du problème précédent sont les plus générales du premier dégré à trois inconnues puisque chacune contient les trois inconnues combinées avec des connues quelconques, il s'ensuit que tout problème du premier dégré à trois inconnues, sera renfermé, dans le précédent, aussitôt qu'il sera exprimé

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

DEUXIÈME PARTIE.

De la résolution des équations du second degré.

Nous avons présentement assez traité des problèmes du premier degré pour passer à ceux des autres degrés, et particulièrement aux problèmes du second degré, que nous allons examiner dans cette seconde partie. Quant à la manière d'exprimer analytiquement leurs conditions, elle est la même que dans les problèmes du premier degré, ce n'est que pour ré-

coudre les équations auxquelles on arrive en exprimant les problêmes, qu'il faut employer des méthodes différentes, suivant les degrès de ces équations. On en peut voir un exemple dans le problême suivant, qui dans sa généralité renferme des problêmes de tous les degrés, et n'est pas plus difficile à exprimer analytiquement pour le degré le plus composé, que pour le plus simple.

I.

Problême qui contient dans sa généralité des Problêmes de tous les degrés

Un homme ayant placé une somme a *dans un commerce où il perd, veut se retirer dès la première année; mais en ayant manqué l'occasion, et ne l'ayant pu retrouver qu'à la deuxième ou à la troisième, ou, en général, à la n^ième. année, il trouve que la somme est diminuée de la quantité* b *de ce qu'elle étoit après la première année. On demande à combien pour cent montoit sa perte par an.*

Soit x le nombre cherché, c'est-à-dire, ce que chaque cent livres perd après la première année. En faisant cette proportion $100 : 100 - x = a : a \times \frac{100-x}{100}$, le quatrième terme

$a \times \frac{100 - x}{100}$, ou $a \times 1 - \frac{x}{100}$ exprimera ce que devient la somme a après la première année.

Si on continue ensuite cette proportion en disant

$$100 : 100 - x = \frac{a \times 100 - x}{100} : \frac{a \times 100 - x}{10000} :$$

le quatrième terme

$$\frac{a \times 100 - x}{10000}, \text{ ou } a \times 1 - \frac{x}{100}$$

sera ce que devient la même somme a après la seconde année.

On exprimera de même ce que cette somme devient après la troisième année par

$a \times 1 - \frac{x}{100}$, et, en général, ce qu'elle devient aprés la $n^{ième}$ année sera $a \times 1 - \frac{x}{100}$, c'est-à-dire a multiplié par la quantité $1 - \frac{x}{100}$ élevée à la puissance n.

II.

Présentement si on veut savoir quelle sera

équation à résoudre, en supposant que le négociant se soit retiré à la seconde année, il

Equation du Problême précédent pour le cas du second degré.

faudra égaler la quantité $a \times 1 - \overline{\frac{x}{100}}^{2}$ à la quantité $a \times 1 - \frac{x}{100}$ diminuée de la quantité b, ce qui donnera . . . . . .

$$a \times 1 - \overline{\frac{x}{100}}^{2} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b,$$

ou en multipliant $1 - \frac{x}{100}$ par lui-même, ainsi que l'indique l'exposant 2,

$$a \times 1 - \frac{2x}{100} + \frac{xx}{10000} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b$$

qui se réduit à $x^2 - 100x = -10000\frac{b}{a}$, équation du second degré à laquelle les méthodes précédentes ne sauroient atteindre.

III.

Si on suppose que ce ne soit qu'à la troisième année, l'équation à résoudre sera

$$a \times 1 - \overline{\frac{x}{100}}^{3} = a \times 1 - \frac{x}{100} - b, \text{ qui en}$$

multipliant $1 - \frac{x}{100}$ deux fois par lui-même; ainsi que l'indique l'exposant 3, devient

Pour le troisième degré.

$$a \times 1 - \frac{3x}{100} + \frac{3x^2}{10000} - \frac{x^3}{1000000}.$$

$= a \times 1 - \frac{x}{100} - b$, ou enfin $x^3 - 300x^2 + 20000x = 1000000\frac{b}{a}$, équation qui doit naturellement promettre plus de difficulté que la précédente.

IV.

Quant aux autres cas, on voit aisément comment on parviendroit successivement à former les équations qu'ils donneroient, et l'induction montre que l'équation seroit toujours du degré exprimé par le nombre n. Si on veut avoir cette équation, en général, sans spécifier le nombre n, on n'aura qu'à employer l'expression générale $a \times 1 - \frac{x}{100}$ (à la puissance n) de la quantité que devient a après la n^{eme} année, et l'équation sera

$$a \times 1 - \frac{x}{100}\ (\text{à la puissance } n) = a \times 1 - \frac{x}{100} - b,$$

ou $1 - \frac{x}{100}\ (\text{à la puissance } n) = 1 - \frac{x}{100} - \frac{b}{a}$.

V.

V.

Contentons-nous présentement de résoudre le problême dans le cas où son équation est du second degré, c'est-à-dire, lorsqu'elle est $x^2 - 100x = -10000\frac{b}{a}$, ou plutôt cherchons une méthode pour résoudre généralement toutes les équations du second degré. Ceux qui voudront résoudre des cas plus élevés du même problême, y parviendront facilement, aussitôt qu'ils auront vu dans la suite les méthodes générales qui conviennent aux degrés que ces équations donnent.

Manière d'arriver à la solution générale des équations du second degré.

Ce qui se présente le plus naturellement en cherchant une méthode pour résoudre généralement les équations du second degré, c'est de voir la liaison qu'il peut y avoir entre ces équations et celles du premier : or, il est clair que toute équation du premier degré deviendra du second, si on quarre les deux membres : par exemple, $x + a = b$ donne étant quarré $x^2 + 2ax + a^2 = b^2$; reste donc à savoir si, par une opération contraire, on pourroit rappeller toute équation du second degré à une du premier. Prenons, par exemple, l'équation $x^2 + px = q$ qui exprimera toute équation du second degré selon les valeurs qu'auront p et q ;

ces lettres pouvant désigner toutes sortes de quantités positives ou négatives. Suivant ce que nous venons de dire, il n'y a qu'à voir si $x^2 + px$ ne seroit pas le quarré de quelque quantité dont la première partie seroit x, et dont la seconde seroit une connue, afin de trouver, par ce moyen, l'équation du premier degré, qui, étant quarrée, seroit devenue $x^2 + px = q$. Or, on voit facilement que $x^2 + px$ n'est pas un quarré, mais on voit en même tems qu'il peut le devenir par quelque addition, et l'on a, comme on sait, la liberté de faire cette addition, pourvu qu'on ajoute la même quantité de l'autre côté de l'équation.

Afin de trouver ce qui manque à $x^2 + px$ pour en faire un quarré, il n'y a autre chose à faire qu'à comparer cette quantité avec le quarré $xx + 2ax + aa$; le terme px répondant à $2ax$, p répondra à $2a$ et partant a à $\frac{1}{2}p$: or, comme a^2 est ce qui manque à $x^2 + 2ax$ pour en faire un quarré, le quarré de $\frac{1}{2}p$, c'est-à-dire, $\frac{1}{4}p^2$ sera ce qui manque à $xx + px$ pour en faire un quarré, c'est-à-dire, que $xx + px + \frac{1}{4}p^2$ sera un quarré ; il l'est en effet, et c'est celui de $x + \frac{1}{2}p$. Ayant donc ajouté $\frac{1}{4}pp$ au premier membre de l'équation, il faut en ajouter autant de l'autre côté, et l'équation sera $xx + px + \frac{1}{4}pp = q + \frac{1}{4}pp$. Or, la quantité

$+\frac{1}{2}p$ multipliée par elle-même donne $xx+px+\frac{1}{4}pp$; il faut donc que cette quantité soit aussi égale au nombre qui, multiplié par lui-même, donnera $q+\frac{1}{4}pp$. Pour exprimer ce nombre, ou plutôt cette quantité en général, on écrit $\sqrt{q+\frac{1}{4}pp}$. Employant le signe $\sqrt{}$, qu'on appelle signe radical, pour faire (1) ressouvenir qu'il faut prendre la racine quarrée de la quantité qui le suit, laquelle doit être toujours, pour éviter la confusion, surmontée d'une barre, ou renfermée entre des parenthèses.

Le signe $\sqrt{}$ indique la racine quarrée.

On a donc, en employant cette dénomination $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, d'où l'on tire $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, valeur de x dans l'équation proposée $xx+px=q$, et cette valeur servira pour toute équation donnée, aussitôt qu'en comparant cette équation avec $xx+px=q$, on aura déduit les valeurs particulières de p et de q.

VI.

Si on se souvient présentement que l'on a trouvé [Ire Part. art. LX] qu'en multipliant une

(1) Le nombre qui, multiplié par lui-même, en a formé un autre est dit sa racine quarrée, ou simplement sa racine; cette définition connue en Arithmétique est aussi admise en Algèbre pour toutes sortes de quantités.

$\sqrt{2500 - 10000\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, que la valeur de x sera $50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$.

Quant à la démonstration de ce principe que la racine d'un produit quelconque se trouve en multipliant les racines de ses produisans, elle est bien facile à imaginer, lorsqu'on se rappelle l'inverse de ce principe, c'est-à-dire, que pour quarrer un produit, comme ab, on multiplie l'un par l'autre, les quarrés aa et bb de ses produisans a et b.

X.

Exemple de ce Problème.

Pour faire usage de cette valeur de x, il n'est plus besoin que de savoir quel est le rapport qu'on veut qu'il y ait entre b et a. Supposons, par exemple, que b soit la partie $\frac{6}{25}$ de a, c'est-à-dire, que le négociant ait trouvé à la seconde année la somme diminuée de ce qu'elle étoit après la première, d'une quantité égale aux $\frac{6}{25}$ du total, on aura par cette supposition $\frac{4b}{a} = \frac{24}{25}$ et $1 - \frac{4b}{a} = \frac{1}{25}$, d'où la racine $\sqrt{1 - \frac{4b}{a}}$ sera $\frac{1}{5}$ et donnera par conséquent $x = 50 \pm 50 \times \frac{1}{5}$ qui exprime à la fois 60 et 40.

Or, ces deux valeurs de x résolvent en effet également l'équation $xx - 100x = -2400$ dans laquelle l'équation générale $xx - 100x = -10000\frac{b}{a}$ se change par la supposition de $\frac{b}{a} = \frac{6}{25}$: car, $xx - 100x$ devient également -2400, soit qu'on fasse $x = 60$, ou que l'on prenne $x = 40$.

On peut encore, d'une manière plus convaincante, reconnoître la nécessité des deux solutions 60 et 40. Car, qu'on suppose d'abord $x = 60$, c'est-à-dire, que la somme de 100000$^{\#}$, par exemple, perde 60 pour cent par an, il est évident qu'après la première année elle sera réduite à 40000$^{\#}$.

A la seconde année elle sera de 16000 $^{\#}$ en perdant encore 60 pour cent ; or 16000 $^{\#}$ sont plus petits que 40000 $^{\#}$ de 24000 $^{\#}$ qui sont les $\frac{6}{25}$ de 100000.

Qu'on suppose à présent que la même somme de 100000$^{\#}$ perde 40 pour cent par an, après la première année elle sera réduite à 60000$^{\#}$, et après la seconde à 36000$^{\#}$: or, 36000$^{\#}$ sont encore plus petits que la somme 60000$^{\#}$ de la quantité 24000$^{\#}$, ou des $\frac{6}{25}$ de 100000$^{\#}$.

XI.

Autre exemple.

Si on veut que b soit les $\frac{4}{25}$ de a, on aura $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 50 \pm 50\sqrt{\frac{9}{25}} = 50 \pm 30$, c'est-à-dire, ou 80, ou 20 qu'on trouvera encore résoudre également le problême.

XII.

Troisième exemple qui, demandant la racine d'une quantité négative, est impossible.

Mais si l'on suppose $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ on trouvera $x = 50 \pm 50\sqrt{1 - \frac{4}{3}}$, ou $50 \pm 50\sqrt{-\frac{1}{3}}$. Or, comme on ne sauroit trouver aucune quantité qui, étant multipliée par elle-même, donne $-$, il s'ensuit que la quantité $\sqrt{-\frac{1}{3}}$ ne sauroit être réelle, ou, ce qui revient au même, que le problême est impossible dans ce cas.

Ainsi on peut être assuré qu'il n'y a aucune valeur possible à substituer pour x dans l'équation $x\,x - 100\,x = -\frac{10000}{3}$ qui fasse que les deux membres en deviennent égaux ; ou, ce qui revient au même, que la somme a ne sauroit être altérée chaque année, suivant aucune proportion donnée qui soit telle que de la seconde à la troisième année la diminution soit d'une quantité égale au tiers du total. Les géomètres

regardent cependant comme une espèce de solution ou de racine de l'équation $xx - 100x = -\frac{10000}{3}$, la valeur $50 \pm 50\sqrt{1-\frac{4}{3}}$ qu'ils trouvent alors, mais ils l'appellent une racine imaginaire, et cette racine imaginaire à cause du signe $\pm$ est toujours censée une double solution.

Ces racines sont dites imaginaires.

XIII.

On voit, par la valeur générale $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}pp}$ de x, que toutes les fois que la quantité désignée par q, sera négative et plus grande que $\frac{1}{4}pp$, les deux racines de l'équation $xx + px = q$, seront toutes deux imaginaires.

Quelles sont les équations du second degré, dont les racines sont imaginaires.

XIV.

Lorsqu'on a une équation quelconque du second degré, on peut la résoudre sans la comparer terme à terme avec l'équation générale $xx + px = q$; car on peut sans augmenter le calcul, répéter le même procédé qu'on a suivi en résolvant cette équation générale. Il ne faut pour cela qu'*ajouter aux deux membres le quarré de la moitié de ce qui multiplie* x *dans le second terme du premier membre, et prendre ensuite la racine quarrée des deux membres.* Qu'on ait, par exemple, à résoudre

Résolution des équations du second degré, sans les comparer à la formule générale.

l'équation $xx+8x=9$, en ajoutant des deux côtés 16, quarré de la moitié de 8, on a $xx+8x+16=9+16=25$. Et prenant ensuite la racine des deux côtés, on a $x+4=\pm 5$, c'est-à-dire, $x=-4\pm 5$, ou $x=-9$ et $x=1$, et ces deux valeurs résolvent également l'équation $xx+8x=9$.

XV.

Pour accoutumer les commençans aux difficultés qu'on rencontre dans les problêmes du second degré, nous leur proposerons encore le problême suivant :

Autre Problême du second degré.

Trouver sur la ligne qui joint deux lumières quelconques, le point où ces deux lumières éclairent également, en supposant ce principe de physique, que l'effet d'une lumière est quatre fois plus grand, lorsqu'elle est deux fois plus proche, neuf fois plus grand lorsqu'elle est trois fois plus proche, ou pour s'exprimer comme les géomètres, que son effet est en raison renversée du quarré de la distance.

Que a exprime la distance qui est entre les lumières données, et que le rapport de m à n soit celui qui est entre l'effet de la plus petite lumière à une certaine distance, et l'effet de la plus grande lumière à la même distance.

De plus, que x exprime la distance de la plus petite des deux lumières à un point pris à volonté sur la ligne qui joint les deux lumières, il est clair que $a-x$ sera la distance du même point à l'autre lumière, que les quarrés de ces deux distances seront x^2 et $x^2-2ax+a^2$, et par conséquent que les quantités qui seront en raison renversée de ces quarrés seront entr'elles comme $\frac{1}{xx}$ (1) et $\frac{1}{xx-2ax+aa}$.

De là il suit que si les lumières étoient égales, les effets qu'elles produiroient chacune dans ce même point, seroient entre elles comme $\frac{1}{xx}$ à $\frac{1}{xx-2ax+aa}$; mais ces lumières ayant des quantités absolues qui sont entr'elles dans la raison de m à n, leurs effets doivent donc être entre eux comme $\frac{m}{xx}$ à $\frac{n}{xx-2ax+aa}$.

(1) Ceci doit être facile à entendre à ceux qui auront vu dans l'Arithmétique ce que c'est que des raisons renversées. Il n'y a pas plus de difficulté à voir que $\frac{1}{xx}$ et $\frac{1}{xx-2ax+aa}$ sont en raison renversée de xx et de $xx-2ax+aa$, qu'à voir que $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ sont en raison renversée de 3 et 4.

Présentement pour que le point pris à volonté devienne le point demandé, il n'y a autre chose à faire qu'à égaler ces deux quantités, ce qui donnera l'équation $maa - 2amx + mxx = nxx$, qu'on résoudra ainsi.

On commencera par passer les termes mxx et $2amx$ dans l'autre membre, ce qui donnera $n - m \times xx + 2amx = maa$, ou $xx + \frac{2am}{n-m}x = \frac{aam}{n-m}$.

On ajoutera ensuite aux deux membres de cette équation le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, et l'on aura

$$x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2} = \frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$$

dont le second membre devient $\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}$ en mettant les deux termes $\frac{aam}{n-m} + \frac{aamm}{\overline{n-m}^2}$ au même dénominateur et en réduisant.

Cela fait, on prendra la racine des deux membres de l'équation, et l'on aura . . . . . .

$$x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{aamn}{\overline{n-m}^2}},$$

ou $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$, en prenant la racine de la partie $\frac{aa}{n-m}$ qui est un quarré parfait, et laissant sous le signe radical son multiplicateur mn, qui n'est pas un quarré, du moins dans toutes les valeurs de m et de n. Donc les deux valeurs d'x qui résolvent l'équation précédente, et par conséquent le problême qui a conduit à cette équation, sont exprimées par la formule

$$x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}, \text{ ou}$$

$$x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}.$$

XVI.

Des deux valeurs précédentes l'une est nécessairement positive, l'autre négative.

On voit par cette expression que l'une des valeurs est nécessairement négative, et l'autre positive. Car, 1°. si on prend le signe — pour la quantité radicale $\sqrt{mn}$, il n'est pas douteux que la quantité totale ne soit négative. 2°. Si on fait $\sqrt{mn}$ positive, $-m+\sqrt{mn}$ qu'on a alors sera positive, parce qu'ayant fait par la supposition n plus grand que m, $\sqrt{mn}$ doit être plus grand que m.

XVII.

Usage de la valeur négative.

Si on cherche présentement l'usage qu'on doit faire de la valeur négative, on trouvera, en se rappellant, ce qu'on a vu (I. part. art. LXIII.) sur ces valeurs dans les équations du premier degré, qu'elle doit être prise dans un sens opposé à la première, c'est-à-dire, que le point qu'elle donne pour résoudre ce problême, au lieu d'être placé entre les deux lumières, sera placé sur le prolongement de la ligne qui les joint du côté de la lumière la plus foible.

On n'aura aucune difficulté à admettre cette position de la valeur négative de x, lorsqu'on remarquera que cette même valeur n'a été trouvée négative, que parce qu'on a résolu le problême, en regardant le point cherché comme placé entre les deux lumières; car si on avoit fait attention à la possibilité de prendre ce point sur le prolongement de la ligne qui les joint, on auroit eu un autre calcul relatif à cette position, et l'x qui auroit été alors placé naturellement sur le prolongement de la ligne qui joint les lumières, auroit été positif.

XVIII.

Pour nous faire mieux entendre, nous allons

reprendre le problême en entier, en supposant le point cherché sur le prolongement de la ligne qui joint les lumières. La distance de ce point à la plus petite lumière étant toujours nommée x, sa distance à la plus grande lumière sera alors $a + x$, les quarrés de ces distances xx et $aa + 2ax + xx$, les deux quantités de lumière $\frac{m}{xx}$ et $\frac{n}{aa+2ax+xx}$, lesquelles étant égales par les conditions du problême, donneront $\frac{m}{xx} = \frac{n}{aa+2ax+xx}$, ou $maa + 2amx + mxx = nxx$, ou $\overline{n-m} \times xx - 2amx = maa$, ou $xx - \frac{2amx}{n-m} = \frac{m}{n-m}aa$ qui étant résolue donnera

$x = \frac{a \times m \pm \sqrt{mn}}{n-m}$ dont la première valeur $\frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n-m}$ sera positive, et la seule qui résoudra exactement le problême dans le sens où il est proposé alors.

Quant à la seconde valeur $\frac{a \times m - \sqrt{mn}}{n-m}$

qui est négative, elle doit être alors prise dans un sens opposé à la première, c'est-à dire, que le point qu'elle donne doit être placé, non comme on l'a supposé dans le calcul, sur le prolongement de la ligne qui joint les deux lumières, mais sur cette ligne elle-même.

Ainsi, dans cette nouvelle solution on a, par rapport aux signes, tout le contraire de ce qu'on avoit dans la première, et ces deux solutions confirment ce que nous avons déjà vu dans la première partie, art. LXIII, que les inconnues qui deviennent négatives doivent toujours être prises dans un sens opposé à celui qu'on leur a donné en exprimant le problême.

XIX.

Nous ôterons, je crois, tout embarras aux lecteurs, sur ce problême, en prenant un exemple. Supposons que $n = 4m$, c'est-à-dire, que la plus grande lumière ait quatre fois plus de force que l'autre: en substituant cette valeur de n dans la formule générale de l'article XV, $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}$; elle deviendra $x = \frac{a}{3} \times \overline{-1 \pm 2}$, c'est-à-dire, ou $+\frac{1}{3}a$, ou $-a$, qui fournissent deux points également

également propres à résoudre le problême, l'un placé entre les deux lumières deux fois plus près de la foible que de la forte, et l'autre sur le prolongement de la ligne qui joint ces lumières, et à une distance de la foible égale à celle qui est entre les deux lumières. Or, il est très-facile de voir sans Algèbre que ces deux points résolvent également le problême, puisqu'ils sont l'un et l'autre deux fois plus près de la lumière foible que de la forte, et que la forte est quadruple de la foible.

X X.

Les principes que nous venons de donner sont suffisans pour toutes les équations du second degré; mais comme les Commençans ne peuvent guères les posséder qu'en les pratiquant, nous allons les exercer à la résolution de plusieurs équations: il en résultera cet avantage, qu'outre qu'ils en sauront mieux la méthode, ils apprendront en même tems de nouvelles opérations d'Algèbre, qui sont sans doute dûes aux recherches que les premiers Analystes ont faites sur les équations du second degré.

Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré.

Soit $bxx = 2c^2x + 2cca$, en ordonnant cette équation, c'est-à-dire, en passant les termes affectés de x du même côté, et divisant tous les termes par le coëfficient de xx, on

aura $x^2 - \frac{2ccx}{b} = \frac{2cca}{b}$, aux deux membres de laquelle ajoutant $\frac{c^4}{bb}$, et prenant ensuite la racine quarrée, on aura

$$x - \frac{cc}{b} = \pm \sqrt{\frac{2ccab + c^4}{bb}}$$

$$= \pm \frac{c}{b} \sqrt{2ab + cc}, \text{ c'est-à-dire,}$$

$$x = \frac{cc \pm c\sqrt{2ab + cc}}{b}.$$

Soit $ff + gg - 2gx + xx = \frac{mmxx}{nn}$ qui devient d'abord

$\frac{mm - nn}{nn} \times xx + 2gx = ff + gg$, et ensuite $xx + \frac{2gnn}{mm - nn} x = \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn}$,

ou $xx + \frac{2gnnx}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$

$$= \frac{ffnn + ggnn}{mm - nn} + \frac{ggn^4}{\overline{mm - nn}^2}$$

$$= \frac{ffnnmm + ggnnmm - ffn^4}{\overline{mm - nn}^2},$$

d'où l'on tire. . . . . $x + \frac{gnn}{mm - nn}$

$= \pm \frac{n\sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}}{mm - nn}$,

ou. . . . . $x = \frac{n}{mm - nn}$

$\times - gn \pm \sqrt{ffmm + ggmm - ffnn}$.

Soit $abc - aff + 2afz = azz - bzz$ qui étant d'abord ordonnée deviendra

$zz - \frac{2af}{a-b} z = \frac{abc - aff}{a-b}$, ensuite

$zz - \frac{2af}{a-b} z + \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{abc - aff}{a-b}$

$+ \frac{aaff}{\overline{a-b}^2} = \frac{aabc - abbc + abff}{\overline{a-b}^2}$ qui donne

$z = \frac{af \pm \sqrt{aabc - abbc + abff}}{a-b}$.

Soit à présent l'équation $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18bb$, en l'ordonnant on aura $xx - ax = 2aa - 9ab + 9bb$, ou $xx - ax + \frac{1}{4}aa = \frac{9}{4}aa - 9ab + 9bb$ qui donne $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$.

On réduira aisément cette quantité si on a vu, et on ne pouvoit guères manquer de le

voir dans tout ce que nous venons de dire, que le quarré d'une quantité composée de deux termes, devoit être égal à la somme des quarrés de chacun de ces deux termes, et au double produit de ces deux termes.

Car, trouvant dans la quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ les termes $\frac{9}{4}aa$ et $9bb$ qui sont les quarrés de $\frac{3}{2}a$ et de $3b$, et le terme $9ab$ qui est le double produit de $\frac{3}{2}a$ et de $3b$, on voit aisément que cette quantité $\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb$ est le quarré de $\frac{3}{2}a - 3b$. Donc au lieu de l'expression $\sqrt{\frac{9}{4}aa - 9ba + 9bb}$, on peut écrire simplement $\frac{3}{2}a - 3b$: donc la valeur de x est alors $\frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}a \mp 3b$, c'est-à-dire, ou $2a - 3b$, ou $-a + 3b$. En effet, l'on voit que ces valeurs résolvent également l'équation donnée.

XXI.

Comme dans les différentes équations du second degré qu'on peut avoir à résoudre, il arrivera souvent des cas de même nature que celui qu'on vient de trouver, il faut avoir quelque méthode sûre et générale pour reconnoître les quantités qui sont des quarrés, et pour trouver leurs racines; cette méthode est aisée à tirer des principes que nous venons d'employer

dans l'exemple précédent; en voici le procédé sur un autre exemple.

Soit la quantité $30\,ab + 9bb + 25a^2$ dont on demande la racine quarrée.

Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple.

J'ordonne d'abord cette quantité par rapport à une des lettres qu'elle contient, par rapport à a, par exemple, et j'écris par conséquent cette quantité, ainsi qu'on la voit dans la table ci-jointe, case 1.

Je prends ensuite la racine du premier terme $25a^2$, laquelle est $5a$, que je prends pour premier terme de la racine cherchée, et que j'écris à côté de la quantité proposée $25a^2 + 30ba + 9bb$, ayant tiré auparavant une barre pour éviter la confusion. Je place alors sous la proposée le quarré $25a^2$ de $5a$, en lui donnant le signe —, je tire une barre et je réduis, j'ai, par ce moyen, la quantité $30ba + 9bb$ que j'écris sous la barre; cela fait, je double $5a$, ce qui me donne $10a$ que j'écris au-dessous de $5a$, et je divise ensuite le premier terme $30ba$ de la quantité $30ba + 9bb$ par $10a$, et j'écris le quotient $3b$, qui est le second terme de la racine cherchée à côté de $5a$, je l'écris en même-tems à côté de $10a$, et je multiplie ce nouveau terme $3b$ de la racine par la quantité inférieure $10a + 3b$, en observant, comme dans la division, de changer les signes en écrivant le

produit sous la quantité $30ab + 9bb$; faisant alors la réduction, et voyant que tout se détruit, je conclus que $5a + 3b$ est la racine cherchée.

XXII.

Pour fortifier les Commençans dans la méthode d'extraire les racines quarrées, il ne sera pas inutile de leur faire parcourir les deux exemples suivans :

Autres exemples d'extractions de racine quarrée.

Soit d'abord proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4a^2 - 4ba + 4ca + bb - 2cb + cc$ ordonnée par rapport à a.

Je commence par prendre la racine de $4a^2$ laquelle est $2a$ que j'écris à côté de la proposée, [Voyez la seconde case de la table ci-jointe] je retranche ensuite le quarré $4aa$, et j'écris le reste $-4ba + 4ca + b^2 - 2cb + cc$; je double $2a$, et j'écris le double $4a$ au-dessous; je divise le terme $-4ba$ par $4a$, et j'écris le quotient $-b$, tant à côté de la racine que du diviseur $4a$. Multipliant alors $-b$ par $4a - b$, j'ai, en changeant les signes, $+4ba - bb$ que je place encore sous le dividende, et j'ai, après la réduction, $+4ca - 2cb + cc$ qui doit servir encore de dividende; je double alors la racine $2a - b$, et j'écris le double $4a - 2b$ au-dessous; je divise $+4ca$ par $4a$, et j'écris

le quotient $+ c$ à côté de la racine $2a - b$, et à côté du diviseur. Faisant ensuite la multiplication de $+ c$ par $4a - 2b + c$, et écrivant avec des signes différens le produit sous le dividende, tout se détruit, d'où je conclus que la racine est possible, et qu'elle est $2a - b + c$.

Soit ensuite proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16b^2ax + 16b^4$ ordonnée par rapport à x, en suivant les opérations qui sont écrites dans la table ci-jointe, case 3, on verra facilement que la racine quarrée de cette quantité est $2xx + 2ax + 4bb$.

XXIII.

Dans les différens exemples que nous avons donnés sur les résolutions des équations du second degré, les Commençans n'ont guères pu trouver de difficulté, que lorsqu'il étoit question de réduire les quantités radicales en ôtant de dessous le signe, les quantités quarrées qui étoient des produisans de la quantité radicale : en effet cette opération est la plus délicate de celles qui peuvent entrer dans la résolution des équations du second degré, il est donc important que les Commençans s'appliquent à la pratiquer facilement.

Pour les aider à y parvenir, nous joindrons ici les exemples suivans :

Exemples de réduction de quantités radicales.

$$\sqrt{48aabc} = 4a\sqrt{3bc}$$

$$\sqrt{\frac{a^3b + 4aabb + 4ab^3}{cc}} = \frac{a+2b}{c}\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{\frac{aahhmm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}} = \frac{am}{pz}\sqrt{hh + 4mp}$$

$$6\sqrt{\tfrac{75}{98}abb} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}}.$$

XXIV.

Les quantités qui n'ont point de racines exactes sont dites incommensurables ou irrationelles.

Presqu'aussitôt que les équations du second degré ont fait connoître les quantités irrationelles ou incommensurables (on appelle ainsi les quantités qui n'ont point de racines exactes), on a été obligé de faire sur ces quantités les mêmes opérations que sur les quantités rationelles ou commensurables, c'est-à-dire, qu'on a eu à ajouter, à soustraire, à multiplier, à diviser des quantités, ou toutes incommensurables, ou en partie incommensurables, et en partie commensurables.

L'addition et la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction.

Quant à l'addition et à la soustraction des quantités radicales, elles ne renferment aucune difficulté que celles de la réduction de ces mêmes quantités à leurs plus simples expressions.

Case 1.

Case 2.

$$4 + c$$
$$- 4$$
$$+ c$$

$$4x^4 \; 2x^2 + 2ax + 4b^2$$
$$- 4x^4 \; 4x^2 + 2ax$$
$$4x^2 + 4ax + 4b^2$$

Case 3.

exemple, s'il faut ajouter $\sqrt{48abb}$ $\sqrt{75a}$, je change la première de ces ités en $4b\sqrt{3a}$, et la seconde en $5b\sqrt{3a}$, a somme est $9b\sqrt{3a}$.

la même manière

$\sqrt{c^3} - \sqrt{\frac{16}{27}c^3} = \frac{32}{9}c\sqrt{3c}$.

$\frac{b^3}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{a^3b - 4aabb + 4ab^3}$

$\frac{1}{c}\sqrt{ab}$.

$\frac{a^3b}{3aa+6ac+3cc} - \frac{bc\sqrt{ab}}{a+c} =$

$-bc \times \frac{\sqrt{ab}}{a+c}$.

XXV.

'égard de la multiplication, si les quan- qu'on veut multiplier sont toutes deux in- nensurables, il est clair qu'il n'y aura chose à faire qu'à multiplier les quantités nt sous le signe radical, et mettre le même radical à la tête du produit ; s'il se trouve les réductions à faire, on les fera comme sus.

Multiplication des incommensurables.

Qu'on ait à multiplier, par exemple, $\sqrt{ab} \times \sqrt{ac}$, on écrira $\sqrt{aabc}$, ou $a\sqrt{bc}$.

De même $\sqrt{3cd} \times \sqrt{4fgc} = \sqrt{12fgccd} = 2c\sqrt{3fgd}$.

Lorsque les quantités radicales qu'on aura à multiplier seront égales, il faudra simplement ôter le signe radical. Pour multiplier, par exemple, $\sqrt{a^3cd}$, par $\sqrt{a^3cd}$, on écrit simplement la quantité a^3cd sans signe radical.

Si la quantité qui multiplie un radical est rationnelle, il faut se contenter de l'écrire devant le signe avec une barre au-dessus lorsqu'elle a plusieurs termes; si on vouloit la faire entrer sous le signe radical, il faudroit la quarrer auparavant.

Par exemple le produit de $a + b$ par $\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$ est $\overline{a+b}\sqrt{\frac{ffg}{aa-bb}}$, ou $\sqrt{\frac{ffg \times \overline{aa+2ab+bb}}{aa-bb}}$, ou $\sqrt{\frac{ffg \times \overline{a+b}}{a-b}}$, ou $\frac{f\sqrt{ag+bg}}{\sqrt{a-b}}$.

$2a\sqrt{\frac{aa+bb}{c}} \times -3a\sqrt{\frac{aa+bb}{d}}$

$$= -\frac{6aa \times \sqrt{aa+bb}}{\sqrt{cd}} = -\frac{6a^4+6aabb}{\sqrt{cd}}.$$

$$\sqrt{a+b} \times \sqrt{a-b} = \sqrt{aa-bb}.$$

S'il est question de multiplier des quantités composées de plusieurs autres, ou toutes radicales, ou en partie radicales et en partie incommensurables, l'opération ne sera pas plus difficile que les précédentes, pourvu qu'on se rappelle les règles ordinaires des multiplications des quantités complexes.

Par exemple, $3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac} \times 2c\sqrt{ab}$

$$= 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{aa-bb}} \times \sqrt{a+\sqrt{aa-bb}}$$

$$= 2aa-bb+2a\sqrt{aa-bb}.$$

$$\sqrt{a+\sqrt{aa-xx}} \times \sqrt{a-\sqrt{aa-xx}} = xx.$$

XXVI.

Division de incommensurables.

Lorsqu'il s'agira de diviser deux quantités irrationnelles l'une par l'autre, on divisera les quantités qui sont sous le signe, et l'on mettra le signe devant le quotient.

S'il faut diviser une quantité irrationnelle par une rationelle, on mettra tout simplement la rationelle sous l'autre, avec une barre assez longue, pour qu'on puisse connoître que le signe ne porte

pas dessus ; si on veut, au contraire, que le signe radical y porte, il faudra quarrer le diviseur.

S'il y a des quantités commensurables devant les radicaux, on les divisera à l'ordinaire, et on écrira leur quotient à côté du quotient radical. Toutes ces choses s'entendront sans aucune peine, par les exemples.

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}} = \sqrt{b}; \quad \frac{ac\sqrt{bc}}{a\sqrt{b}} = c\sqrt{c}; \quad \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}}$$

$$= 3a\sqrt{3c}; \quad \frac{\sqrt{aa-xx}}{\sqrt{a+x}} = \sqrt{a-x};$$

$$\frac{\sqrt{aabb-bbxx}}{a-x} = b\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

XXVII.

Ce qu'on vient de dire sur les équations du second degré, suffit lorsque ces équations ne renferment qu'une inconnue ; mais comme on rencontre souvent des problêmes dans lesquels il est nécessaire d'en employer plusieurs, il faut voir comment l'on traite ces problêmes, nous prendrons dans cette vue l'exemple suivant.

Problême du second degré qui

Trouver trois quantités en progression (1)

(1) Trois quantités dont la première est à la seconde, comme la seconde à la troisième, telles que 8, 12, 18, par exemple, sont dites en progression géométrique, ou en proportion continue. On ne sauroit entendre la théprie des proportions, qu'on ne sache en même-tems celle des progressions.

géométrique, dont la somme soit donnée, ainsi que la somme de leurs quarrés. demande plusieurs inconnues.

Soient les trois quantités cherchées x, y, z, on aura par la nature des progressions $x:y=y:z$, c'est-à-dire, $yy = xz$; de plus, parce que leur somme est donnée, en nommant cette somme a, on aura $x+y+z=a$; enfin, en nommant la somme de leurs quarrés bb, on aura, par la dernière condition du problême, $xx+yy+zz=bb$.

Pour faire usage de ces trois équations, on commencera par chasser z au moyen de sa valeur $a-x-y$ tirée de l'équation $x+y+z=a$; substituant donc cette valeur de z dans les deux autres équations, elles se changeront en $2yy+2xx+2xy+aa-2ax-2ay=bb$, et $yy=ax-xx-xy$. Pour chasser ensuite celle qu'on voudra des deux inconnues que renferment ces deux équations, on trouvera la valeur que cette inconnue a dans chacune de ces équations, et on égalera les deux valeurs que l'on aura par ce moyen, opérations faciles par les principes précédens. Que x soit cette inconnue à chasser, la première équation donnera

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}a \pm\sqrt{\frac{bb}{2}-\frac{aa}{4}-\tfrac{3}{4}yy+\tfrac{1}{2}ay},$$

et pour la seconde

. . . . . $x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Il n'y a donc plus qu'à égaler ces deux valeurs, ce qui donnera l'équation. . . . . .

. . . . . $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay}$

$= -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$ qu'il ne s'agit plus que de résoudre.

On remarquera premièrement, que les termes $-\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}a$ sont communs des deux côtés, et que par conséquent l'équation se réduit à

$\pm \sqrt{\frac{bb}{2} - \frac{aa}{4} - \frac{3}{4}yy + \frac{1}{2}ay} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ay - \frac{3}{4}yy}$. Or, en quarrant les deux membres de cette équation, les deux radicaux disparoissent tout de suite, et l'équation devient en réduisant $ay = \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$ qui donne $y = \frac{aa - bb}{2a}$, substituant ensuite cette valeur de y dans l'une des précédentes de x, on aura $x = \frac{1}{4}a + \frac{bb}{4a}$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{4}aa+\tfrac{1}{4}bb-\tfrac{3}{16}aa+\tfrac{3}{8}bb-\frac{3b^4}{16aa}}$$

$$\text{ou } x=\frac{bb+aa\pm\sqrt{10bbaa-3a^4-3b^4}}{4a}$$

et en substituant la valeur de x et celle de y dans $z=a-x-y$, on aura enfin

$$z=\frac{aa+bb\mp\sqrt{10bbaa-3a^4-3b^4}}{4a}.$$

XXVIII.

Comme on est arrivé, dans cette solution, à une valeur extrêmement simple pour y, après avoir eu des radicaux assez composés, on doit soupçonner qu'on pouvoit y arriver par une voie plus courte : en effet, avec un peu de réflexion, on trouve facilement la méthode suivante.

Autre manière de résoudre les équations précédentes.

Soient reprises les deux équations $x^2-ax+yx=\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}-y^2+ay$ et $x^2+xy-ax=-yy$; en retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on a

$0=\frac{bb}{2}-\frac{aa}{2}+ay$, d'où l'on tire

$y=\frac{aa-bb}{2a}$, qui, étant substitué dans

l'une ou l'autre de ces deux équations, donne

$$x^2 + \frac{aax - bbx}{2a} - ax$$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa}, \text{ ou } x^2 - \frac{\overline{b^2 + a^2} \times x}{2a}$$

$$= \frac{-a^4 + 2aabb - b^4}{4aa} \text{ d'où l'on tire la même}$$

valeur de x que ci-dessus.

XXIX.

Dans ce problême, on a eu des quantités qui se sont détruites par une espèce de hazard, ce qui a extrêmement simplifié les calculs; mais comme les équations du second degré, à plusieurs inconnues, n'offrent pas toujours de pareilles facilités, il faut savoir ce qu'on doit faire dans des cas moins simples. Pour cela soit pris, par exemple, les deux équations

$$xx + ax - 2xy = aa + 2yy;$$

$$xx - 2ax + xy = 2aa - yy.$$

Exemple d'équations du second degré à deux inconnues plus compliqué que le précédent.

La première de ces équations donne $x = -\frac{1}{2}a + y \pm \sqrt{\frac{5}{4}aa - ay + 3yy}$, l'autre donne $x = a - \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - ay - \frac{3}{4}yy}$. Egalant ensuite ces deux valeurs, et réduisant, on a

$$-\frac{3a}{2}+\tfrac{1}{2}y\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}aa-ay+3yy}$$
$$=\pm\sqrt{3aa-ay-\tfrac{3}{4}yy}.$$

Pour faire ensuite évanouir les radicaux de cette équation, je commence par quarrer les deux membres, ce qui me donne $\frac{9}{4}yy-\frac{9}{2}ay+\frac{9}{4}aa\pm\overline{3y-3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa-ay+3yy}+\frac{1}{4}aa-ay+3yy=3aa-ay-\frac{3}{4}yy$ qui contient encore un radical. Afin de le faire disparoître, j'écris ainsi cette équation. . . . . $\ldots-\frac{1}{2}aa+\frac{9}{2}ay-6yy=\pm\overline{3y-3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa-ay+3yy}$, en la réduisant et laissant la quantité radicale $\pm\overline{3y-3a}\sqrt{\frac{1}{4}aa-ay+3yy}$ seule d'un côté de l'équation; cela fait, je quarre les deux membres, et j'ai

$$\tfrac{1}{4}a^4-\tfrac{9}{2}a^3y+\tfrac{105}{4}aayy-54ay^3+36y^4=\overline{9yy-18ay+9aa}\times\overline{\tfrac{9}{4}aa-ay+3yy}$$

ou en réduisant

$$9y^4+9ay^3-30aayy+27a^3y=11a^4$$

Equation finale à laquelle conduisent ces équations.

c'est-là l'équation qui résulte des deux précédentes, et celle qu'il faudroit résoudre pour avoir la solution du problême qui auroit donné ces deux équations : on voit par-là qu'il n'en est pas des équations du second degré à plusieurs inconnues, comme de celles du premier, qui

ne donnent jamais une équation finale d'un autre degré qu'elles.

XXX.

Autre manière de traiter le même exemple.

On peut, sans avoir la peine de résoudre les équations du second degré, et de chasser ensuite leurs radicaux, parvenir également à l'équation finale.

Soient reprises, pour le faire voir, les deux équations précédentes, et soit tirée la valeur de xx de chacune d'elles, la première fournira

$$x^2 = aa + 2yy - ax + 2xy,$$

la seconde

$$x^2 = 2aa - yy + 2ax - 2xy.$$

Egalant ces deux valeurs, on a $aa + 2yy + 2xy - ax = 2aa - yy - xy + 2ax$, d'où l'on tire $x = \frac{3yy - aa}{3a - 3y}$, dont la substitution dans l'une ou l'autre des deux équations données, dans $xx - 2ax + xy = 2aa - yy$, par exemple, donne $\frac{9y^4 - 6aayy + a^4}{\overline{3a - 3y}^2} + \frac{\overline{y - 2a} \times \overline{3yy - aa}}{3a - 3y} = 2aa - yy$ qui étant réduite, produit la même équation $9y^4 + 9ay^3 - 30aayy + 27a^3y = 11a^4$.

XXXI.

Pour habituer les Commençans à se servir de cette méthode qui est d'un grand usage dans l'analyse, nous allons l'appliquer aux deux équations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e$$
$$x^2 + fyx + gx = hy^2 + iy + k$$

qui contiennent chacune la plus grande complication que puissent avoir les équations du second degré à deux inconnues.

Tirant une valeur de x^2 de chacune de ces équations et les égalant, on aura

$$\overline{a-f} \times xy + \overline{b-g} \times x = \overline{c-h} \times y^2 + \overline{d-i} \times y + \overline{e-k}$$

laquelle, en faisant pour abréger les calculs $a-f=l$; $b-g=m$; $c-h=n$; $d-i=p$; $e-k=q$ se change en $lxy + mx = ny^2 + py + q$, d'où je tire $x = \frac{ny^2+py+q}{ly+m}$. Or, substituant celle-ci dans l'une ou dans l'autre des deux équations données, dans la première, par exemple, j'ai $\frac{\overline{ny^2+py+q}^2}{\overline{ly+m}^2} + \frac{\overline{ay+b} \times \overline{ny^2+py+q}}{ly+m} = cy^2 + dy + e$

ou $\overline{ny^2+py+q}^2+\overline{ay+b}\times\overline{ny^2+py+q}\times\overline{ly+m}=\overline{cy^2+dy+e}\times\overline{ly+m}^2$.

Si on fait alors les opérations indiquées, que l'on réduise et que l'on ordonne, il vient enfin

$$y^4+\frac{bln+amn+alp+2np-2mlc-l^2d}{aln+nn-l^2c}y^3$$
$$+\frac{bmn+qal+pbl+pam+p^2+2nq-m^2c-2mld-el^2}{aln+nn-l^2c}y^2$$
$$+\frac{blq+amq+bmp+2pq-m^2d-2mel}{aln+nn-l^2c}y$$
$$=\frac{m^2e-q^2-bmq}{aln+n^2-l^2c},$$

équation du quatrième degré qui résulte des deux équations du second degré les plus générales.

XXXII.

Si on avoit des équations telles que $xxy+axy=abb$ et $xxyy+ccyx=a4$, ces équations ne seroient pas comptées parmi celles du second degré, parce que le produit inconnu de x^2 par y renfermant trois facteurs est du troisième degré, et que celui de x^2 par y^2 qui en contient quatre, est du quatrième; mais la méthode précédente serviroit avec la même facilité à chasser les x de ces deux équations. Pour le faire voir, supposons que α représente toutes les quantités composées d'y et de connues, à quelque degré

y étant à un degré quelconque, et *x* seulement au second degré, on traiteroit de même les deux équations.

qu'elles montent, qui peuvent multiplier x^2 dans l'une des équations données; β toutes celles qui multiplient x dans la même équation; γ les quantités entièrement connues qui sont de l'autre côté de la même équation, c'est-à-dire que cette première équation sera $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Que la seconde soit de même $\delta x^2 + \varepsilon x = \phi$.

On tirera de la première $x^2 = \frac{\gamma - \beta x}{\alpha}$, et de la seconde $x^2 = \frac{\phi - \varepsilon x}{\delta}$ lesquelles étant égalées donnent $\gamma\delta - \beta\delta x = \phi\alpha - \varepsilon\alpha x$ d'où l'on tire $x = \frac{\phi\alpha - \gamma\delta}{\varepsilon\alpha - \beta\delta}$, qui, étant substitué dans l'équation $\alpha x^2 + \beta x = \gamma$, donne $\alpha \times \overline{\phi\alpha - \gamma\delta}^2 + \beta \times \overline{\alpha\varepsilon - \beta\delta} \times \overline{\phi\alpha - \gamma\delta} = \gamma \times \overline{\varepsilon\alpha - \beta\delta}^2$ dans laquelle mettant pour α, β, γ, δ, ε, ϕ leurs valeurs composées de y, et de connues, l'on aura l'équation cherchée.

XXXIII.

Ce qu'il faudroit faire pour arriver à l'équation finale, lorsque x seroit au troisième degré

Si les x, ainsi que les y, montoient chacuns à des degrés plus hauts que le second, on pourroit encore, dans ce cas, employer la méthode précédente : supposons, par exemple, qu'on ait les deux équations

$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$, et $\varepsilon x^3 + \phi x^2 + \chi x = \nu$

dans lesquelles $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \phi, \chi, \eta$ représentent toutes sortes de quantités composées d'y et de connues, on commencera par prendre x^3 dans chacune de ces équations, et on égalera ses deux valeurs, ce qui donnera

$$\frac{\delta - \beta x^2 - \gamma x}{\alpha} = \frac{\eta - \phi x^2 - \chi x}{\varepsilon},$$

ou $\delta\varepsilon - \varepsilon\beta x^2 - \gamma\varepsilon x = \eta\alpha - \phi\alpha x^2 - \chi\alpha x$,

ou $\phi\alpha - \varepsilon\beta \times x^2 = \gamma\varepsilon - \chi\alpha \times x + \eta\alpha - \delta\varepsilon$

dans laquelle x n'est qu'au second degré. Multipliant ensuite cette équation par αx, ainsi que l'équation $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = \delta$ par $\phi\alpha - \varepsilon\beta$, j'ai les deux équations $\phi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta \times x^3 = \gamma\varepsilon\alpha - \chi\alpha^2 \times x^2 + \eta\varepsilon\alpha - \delta\varepsilon\alpha \times x$ et $\phi\alpha^2 - \alpha\varepsilon\beta \times x^3 + \beta\phi\alpha - \beta^2\varepsilon \times x^2 + \gamma\phi\alpha - \gamma\varepsilon\beta \times x = \delta \times \phi\alpha - \varepsilon\beta$ desquelles je chasse x^3 comme des deux premières équations, ce qui donnera $\alpha \times \gamma\varepsilon - \chi\alpha + \beta \times \phi\alpha - \beta\varepsilon \times x^2 + \alpha \times \eta\varepsilon - \delta\varepsilon + \gamma \times \phi\alpha - \varepsilon\beta \times x = \delta \times \phi\alpha - \varepsilon\beta$: dans laquelle x ne monte non plus qu'au second degré. Voilà donc le problème réduit présentement au cas qu'on a résolu dans l'article précédent, c'est-à-dire, à celui où l'on a deux équa-

tions dans lesquelles l'inconnue x ne monte qu'au second degré. Il est inutile d'en achever ici le calcul, puisqu'il n'auroit de difficulté que celle de la longueur.

XXXIV.

Si l'inconnue, qu'on veut chasser des deux équations proposées, s'y trouvoit élevée à un degré plus haut que le troisième, on voit bien que par une opération semblable à la précédente, on les changeroit d'abord en deux autres équations d'un degré moindre, et que par ce moyen on parviendroit toujours à chasser entièrement l'inconnue.

Ce seroit la même chose, si x montoit à des degrés plus élevés.

XXXV.

Si au lieu de deux inconnues on en avoit trois élevées chacune à un degré quelconque, il est clair que pourvu qu'on eût trois équations, on parviendroit par la même méthode, à une équation finale, qui ne contiendroit que celle que l'on voudroit de ces trois inconnues; car, oubliant d'abord une de ces trois inconnues, deux des trois équations suffiroient pour arriver à une seule, qui ne renfermeroit que l'inconnue oubliée, et que celle que l'on voudroit des deux autres inconnues. Faisant ensuite la même opération avec l'une des deux équations employées

S'il y avoit plus de deux inconnues, on parviendroit de même à l'équation finale.

dans la première opération et la troisième équation, on parviendroit à une autre équation, entre les deux mêmes inconnues, c'est-à-dire, que le problème seroit réduit à celui où l'on a deux équations à deux inconnues, d'où l'on parviendroit enfin à une seule inconnue renfermée dans une équation.

Si on avoit quatre équations et quatre inconnues, on réduiroit de même la question à trois équations et trois inconnues, puis à deux équations et deux inconnues, puis enfin à une seule équation et à une inconnue ; il en seroit de même pour un plus grand nombre d'équations et d'inconnues.

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

TROISIÈME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier et du second degrés qu'elles peuvent renfermer.

Si les équations plus élevées que le second degré ont présenté de grandes difficultés, lorsqu'on a entrepris de les résoudre dans tous les cas, il

a été du moins assez facile de faire sur ces équations des réflexions générales qui pouvoient en faire connoître la nature, et servir à les résoudre dans beaucoup de cas particuliers.

Ayant vu, par exemple, que les équations du premier degré n'avoient qu'une racine, que celles du second en avoient deux, on a été porté à croire que celles du troisième en avoient trois, et ainsi de suite, et pour s'assurer de cette vérité, ou plutôt pour comprendre comment une équation pouvoit avoir autant de racines qu'elle a de degrés, on a cherché l'inverse du problême qu'on s'étoit proposé d'abord, c'est-à-dire, qu'au lieu de chercher les racines d'une équation, on a cherché qu'elle seroit l'équation qui auroit pour ses racines des quantités données, problême infiniment plus facile que le premier.

I.

Manière de former une équation par le moyen de ses racines.

Qu'on demande, par exemple, quelle est l'équation dans laquelle x pourra avoir également pour valeur ou 2, ou 3, ou 5; on n'a qu'à former ces trois équations simples, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x - 5 = 0$; multipliant ensuite les deux premières l'une par l'au-

tre, et leur produit par la troisième, on a $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, dans laquelle on peut supposer également $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$. On voit aisément que chacune de ces valeurs étant substituée à la place de x dans l'équation $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, doit la résoudre, ou, ce qui revient au même, en doit faire évanouir tous les termes; car cette équation pouvant s'écrire ainsi

$x-2 \times x-3 \times x-5 = 0$, chacune de ses parties étant égalée à zéro, doit, à cause qu'elle multiplie toutes les autres, les faire évanouir en même-tems : or, la supposition de $x = 2$, ou $= 3$, ou $= 5$ rend toujours zéro l'une des trois parties $x-2$, $x-3$, $x-5$.

II.

Une équation a autant de racines que de degrés.

Par cette méthode on voit comment une équation peut avoir autant de racines que de degrés. Pour traiter la question plus en général, soient a, b, c, d, e, les racines d'une équation, et partant $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, $x-e=0$, les équations simples qui composent l'équation dont les racines sont ces quantités. En multipliant toutes ces équations les unes par les autres, on aura

$$x^5 - ax^4 + abx^3 - abcx^2 + abcdx - abcde = 0$$

$$\begin{array}{llll} -b & +ac & -abd & +abce \\ -c & +ad & -abe & +abde \\ -d & +ae & -acd & +acde \\ -e & +bc & -ace & +bcde \\ & +bd & -ade & \\ & +be & -bcd & \\ & +cd & -bce & \\ & +ce & -bde & \\ & +de & -cde & \end{array}$$

pour l'équation dans laquelle x peut avoir à la fois les valeurs données a, b, c, d, e.

III.

Propriété des équations de tous les degrés.

Il est aisé de tirer de cette équation, ces remarques générales sur les équations de tous les degrés.

1°. Que le premier terme n'est autre chose que l'inconnue élevée à la puissance exprimée par le nombre des racines, sans coëfficient.

Que le second terme contient l'inconnue élevée à une puissance de moins avec un coëfficient égal à la somme des racines.

Que dans le troisième, l'inconnue se trouve élevée à deux puissances de moins, et a pour

coëfficient la somme de tous les produits deux à deux qu'on peut faire de toutes les racines.

Que dans le quatrième, on aura de même l'inconnue élevée à trois puissances de moins avec un coëfficient qui exprime la somme des produits de toutes les racines prises trois à trois.

Il en sera ainsi des autres termes jusqu'au dernier, qui n'aura aucune puissance de x, mais qui sera le produit de toutes les racines les unes par les autres. Ces remarques ont servi de base en beaucoup de rencontres, soit pour trouver les racines des équations proposées, soit du moins pour connoître plusieurs de leurs propriétés.

IV.

Dans une équation sans second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives.

On a tiré, par exemple, de ces remarques qu'une équation, comme $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 7x - 3 = 0$, manquant de second terme, doit avoir nécessairement des racines positives et des négatives ; de plus, que la somme des unes doit être égale à la somme des autres ; car sans cette condition elles ne se seroient pas détruites pour faire évanouir le second terme. Ainsi, dans une équation du troisième degré, où le second terme manquera, il y aura toujours ou une racine négative égale aux deux positives,

ou une racine positive égale aux deux négatives.

V.

Une équation qui n'a point de terme connu, a au moins une racine égale à zéro.

On a tiré encore des mêmes remarques que lorsqu'une équation n'aura pas de dernier terme, il faudra qu'il y ait au moins une racine égale à zéro ; ce qu'on auroit pu reconnoître aussi, en faisant attention qu'une équation telle que $x^3 + 5x^2 + 3x = 0$ qui manque de terme connu peut toujours se diviser par $x = 0$.

VI.

Conditions qu'il faut observer dans une équation, pour y trouver les propriétés précédentes.

Lorsqu'on voudra retrouver dans une équation les propriétés qu'on vient d'énoncer, on voit bien qu'il faudra que tous les termes de cette équation soient du même côté, qu'ils soient ordonnés par rapport à l'inconnue, et que cette inconnue n'ait d'autre coëfficient que l'unité au premier terme. De plus, que si quelqu'une des puissances de x manque dans l'équation, il faudra toujours prendre pour quantième des autres termes ceux qu'ils auroient, si ces puissances ne manquoient pas ; par exemple ; dans l'équation $x^5 - 3x^3 + 4x - 5 = 0$, le terme $3x^3$ n'est que le troisième, parce que le second manque ; et le terme $4x$ est le cinquième, parce que le quatrième manque. Si on vouloit donc appliquer

les remarques précédentes à une telle équation, on diroit que la somme de ses cinq racines est nulle, c'est-à-dire, qu'elle a nécessairement des racines négatives et des racines positives, et que la somme des premières est égale à la somme des autres. On diroit encore que la somme des produits de toutes les racines deux à deux est égale à -3; que la somme de tous les produits trois à trois est 0, que la somme de tous les produits quatre à quatre est $+4$, qu'enfin le produit de toutes les racines est -5.

VII.

Méthode pour avoir les racines commensurables d'une équation.

De la propriété qu'a le dernier terme d'une équation d'être égal au produit de toutes les racines, on peut tirer une méthode d'avoir toutes les racines qui sont commensurables dans une équation: car elles doivent toutes se trouver en tentant la division de l'équation par x plus ou moins chacun des diviseurs du dernier terme.

Par exemple, qu'on ait l'équation $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$. les diviseurs du terme -3. ne pouvant être que -1, -3, $+1$, $+3$; je tente la division par $x-1$, $x-3$, $x+1$, $x+3$; elle réussit par $x-1$ et par $x-3$, et je vois que l'équation proposée auroit pu s'écrire

ainsi $x-1 \times x-1 \times x-3=0$, ce qui m'appprend qu'elle a trois racines, dont l'une est $+3$, et les autres, toutes deux égales, sont chacune $+1$.

Lorsqu'une équation ne pourra se diviser par aucune équation simple, composée de x + ou — quelqu'un des diviseurs du dernier terme, on sera sûr que cette équation n'aura aucune racine commensurable.

VIII.

Il se présente contre cette méthode de trouver les racines commensurables, une difficulté qui, au premier coup-d'œil, paroît assez considérable; c'est que si quelque racine de cette équation étoit une fraction, on ne sauroit par comment la trouver parmi les diviseurs du dernier terme: parce qu'en admettant des diviseurs fractionnaires dans un nombre, on en peut trouver à l'infini. Mais il est aisé de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer que tous les coëfficiens d'une équation étant des nombres entiers, il est impossible que l'inconnue ait pour valeur une fraction. Je crois que ceux qui possèdent un peu l'arithmétique des fractions, reconnoîtront sans secours la vérité de cette proposition; mais pour leur faciliter les moyens de s'en

Dans une équation dont tous les coëfficiens sont des entiers, l'inconnue ne sauroit être une fraction.

s'en assurer, prenons pour exemple une équation comme $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, dans laquelle a, b, c, sont supposés des nombres entiers. Il est évident que, x étant une fraction, x^3, x^2, en seront aussi, et que jamais la fraction qui exprime x^3 ne pourra se réduire à une qui ait le même dénominateur que x^2 ou son multiple ax^2. A plus forte raison, la même fraction ne pourra pas non plus se réduire au même dénominateur que x, ou son multiple bx. Donc $x^3 + ax^2 + bx$ ne pourra jamais faire une fraction plus simple que x^3 qui est irréductible. Donc x ne peut jamais être une fraction dans de telles équations.

IX.

Lorsqu'on aura une équation dont les coëfficiens seront des fractions, on ne pourra pas, en la laissant avec ses fractions, trouver par la méthode précédente les racines commensurables qu'elle pourroit avoir; mais on pourra toujours, par une transformation assez simple, changer le problême en un autre, où l'équation à résoudre n'aura plus de fractions, sans donner de coëfficient au premier terme.

Soit, par exemple, l'équation. . . . . .

Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une équation quelconque.

$$x^3 + \frac{a}{b}x^2 + \frac{c}{d}x + \frac{e}{f} = 0$$

(on voit qu'une équation d'un degré plus élevé n'auroit pas plus de difficulté) en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue y divisée par quelque nombre indéterminé m, je change l'équation en une nouvelle

$$\frac{y^3}{m^3} + \frac{a y^2}{b m^2} + \frac{c y}{d m} + \frac{e}{f} = 0,$$

$$\text{ou } y^3 + \frac{a m}{b} y^2 + \frac{c m^2}{d} y + \frac{e m^3}{f} = 0,$$

dans laquelle je vois que si m est divisible à la fois par b, par d et par f; $\frac{a m}{b}$, $\frac{c m^2}{d}$ et $\frac{e m^3}{f}$ seront des nombres entiers. Or, le problême est réduit par-là à quelque chose de bien aisé; car on est au moins sûr de réussir en prenant pour m le produit des nombres b, d, f, et si ces nombres ne sont pas premiers (1) entre eux, on trouvera aisément un nombre plus petit que leur produit qui sera divisible par tous les trois.

(1) On appelle en arithmétique nombres premiers ceux qui n'ont point de diviseurs, tels que 5, 11, 31, etc. et on dit que deux nombres sont premiers entre eux, lorsqu'ils n'ont aucun commun diviseur, tels sont 21 et 16, 18 et 35.

X.

L'équation étant changée en une autre, sans fraction, on cherchera les racines commensurables de cette dernière par la méthode précédente; et si elle n'en a pas, on sera sûr que la première n'en avoit pas non plus, puisque x, supposé commensurable, ne pourra jamais donner une quantité incommensurable, en le divisant par le nombre m, qui est commensurable aussi.

Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires.

XI.

La méthode précédente a cet inconvénient considérable, que lorsqu'il arrive que le dernier terme a beaucoup de diviseurs, les calculs qu'il faut faire pour tenter toutes les divisions que cette méthode prescrit sont si longs, qu'on l'abandonneroit malgré l'avantage infini de s'étendre généralement aux équations de tous les degrés, dont une ou plusieurs racines sont commensurables. C'est ce qui a engagé les plus habiles Analystes à perfectionner cette méthode, en trouvant des moyens plus faciles que la division pour reconnoître les diviseurs qui ne doivent pas réussir. Voici comment on s'y est pris.

Inconvénient de la méthode précédente.

XII.

Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode.

On a d'abord remarqué que si on faisoit dans la racine $x+a$ d'une équation quelconque, ou, ce qui revient au même, dans le diviseur $x+a$ d'une quantité quelconque, x égal à un nombre donné, le nombre dans lequel se changeoit alors la racine devoit être un diviseur de la quantité proposée, dans laquelle on auroit fait x égal au même nombre : c'est-à-dire, par exemple, que si on a la quantité $x^3 - 2x - 21$ dont on sait que $x - 3$ est un diviseur, il arrivera qu'en faisant $x = 5$ le nombre 94 que devient $x^3 - 2x - 21$ par cette supposition, est nécessairement divisible par le nombre 2 que devient $x - 3$ par la même supposition.

En partant de-là on a supposé dans la quantité dont on cherchoit un diviseur, x successivement égal à plusieurs nombres, tels, par exemple, que $+1$, 0, -1 ; suppositions qui devoient être faites les premières, parce qu'elles donnent les substitutions les plus faciles. Ensuite on a cherché tous les diviseurs des nombres dans lesquels la quantité proposée se change par ces substitutions, et on a fait ces remarques qui se présentoient naturellement aprés la première.

1°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = +1$ dans la

quantité, on devoit trouver le nombre $1+a$, puisque $x+a$ étoit le diviseur cherché.

2°. Que parmi tous les diviseurs venus par la supposition de $x=0$, qui ne sont autre chose que les diviseurs du dernier terme de la quantité proposée, devoit être le nombre a.

3°. Que parmi tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=-1$, devoit être le nombre $-1+a$.

XIII.

Principe fondamental pour trouver les racines commensurables.

Or, comme les nombres $1+a$, a, $-1+a$ sont nécessairement tels que le premier surpasse le second d'une unité, et que le second surpasse le troisième d'une unité aussi; il étoit aisé de tirer de là ce principe, que de tous les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=0$, aucun ne pouvoit être le nombre demandé a, s'il ne se trouvoit en même-tems surpassé de l'unité par quelqu'un des diviseurs du nombre venu par la supposition de $x=1$, et s'il ne surpassoit en même-tems d'une unité quelqu'un des diviseurs du nombre qu'a donné la supposition de $x=-1$. On voit bien qu'un tel principe doit faire éviter beaucoup de divisions inutiles dans la recherche des racines commensurables.

Si on trouve plusieurs nombres, parmi les diviseurs du nombre venu par la supposition de $x = 0$, qui aient les conditions qu'on vient de remarquer, on fera ensuite $x = 2$, et on verra si parmi les diviseurs des nombres qui viennent alors, on trouve des nombres qui surpassent d'une unité ceux qu'a donnés la supposition de $x = 1$, et ainsi de suite.

Au reste, on voit bien que l'examen qu'on fait de tous ces diviseurs doit être double, c'est-à-dire, que chacun d'eux doit être pris aussi bien en — qu'en +.

XIV.

Pour éclaircir cette méthode et pour en faciliter l'usage, nous allons en donner quelques exemples en faisant voir l'ordre qu'il faut garder dans le calcul pour ne s'y point tromper, et pour abréger, autant qu'il est possible, la peine du calculateur.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$, dont il s'agit de trouver les racines commensurables, ou, ce qui revient au même, soit la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$, dont on demande les diviseurs du premier degré.

Je commence par écrire (voyez la table ci-jointe, case 1) l'une sous l'autre les suppositions 1, 0, — 1 que je veux faire pour x; j'é-

cris ensuite à côté de chacun de ces nombres les nombres $-8, +6, +16$, ou simplement $8, 6, 16$, (à cause que les signes sont indifférens pour les diviseurs) dans lesquels se change successivement la quantité $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par ces suppositions, et je les sépare des premiers nombres par une barre verticale. J'écris dans une troisième colonne les nombres 1, 2, 4, 8; 1, 2, 3, 6; 1, 2, 4, 8, 16, qui sont les diviseurs des nombres précédens; les quatre premiers à côté de 8 dont ils sont les diviseurs, les quatre seconds à côté de 6, et les cinq derniers à côté de 16.

Cela posé, pour trouver parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, celui qu'il faut ajouter ou retrancher à x pour avoir le diviseur cherché, ou plutôt pour exclure de tous ces diviseurs ceux qui n'ont pas les conditions requises, je commence par remarquer que 1 qui est le premier de ces diviseurs, ne sauroit être admis, soit qu'on le prenne en $+$, soit qu'on le prenne en $-$; car si on le prend en $+$, c'est-à-dire, si on regarde $x + 1$ comme le diviseur cherché, 2 seroit ce que deviendroit ce diviseur par la supposition de $x = +1$, et 0, ce qu'il deviendroit par la supposition de $x = -1$, et par conséquent il faudroit trouver à la fois 2 dans

les nombres de la première bande, et o dans ceux de la troisième : or, la seconde de ces conditions n'est pas remplie. Quant à ce que — 1 ne convient pas non plus, c'est-à-dire, que $x-1$ n'est pas le diviseur cherché, cela se tire de que ce diviseur devenant o par la supposition de $x=+1$, et — 2 par la supposition de $x=-1$, il faudroit par conséquent trouver o dans les nombres de la première bande, et le nombre 2 dans ceux de la troisième. Or, il n'y a que la seconde de ces deux conditions qui ait lieu. Je vois ensuite que le diviseur 2 est aussi dans le cas d'être rejetté, parce que si on le prend en +, c'est-a-dire, si on regarde $x+2$ comme le diviseur cherché, on auroit + 3 par la supposition de $x=1$, et + 1 par la supposition de $x=-1$, ce qui demanderoit qu'on trouvât les nombres 3 dans la première bande, et 1 dans la troisième : or, la première de ces deux conditions ne se trouve pas remplie. Et si l'on prenoit 2 en — ; c'est-à-dire, qu'on voulut que $x-2$ fût le diviseur, on auroit alors — 1 et — 3 pour les suppositions, de $x=+1$ et de $x=-1$, ce qui demanderoit de trouver à la fois 1 dans la première bande et 3 dans la troisième, conditions dont il n'y a que la première qui ait lieu.

Ayant exclu 1 et 2, je prends le diviseur 3,

et je vois qu'en le prenant en +, c'est-à-dire, en regardant $x+3$ comme le diviseur cherché, il faudra trouver $+4$ par la supposition de $x=+1$, et $+2$ par la supposition de $x=-1$. Or, je trouve effectivement 4 dans la première bande, et 2 dans la troisième. Donc $+3$ a les conditions requises, je l'écris alors à la seconde bande, c'est-à-dire, vis-à-vis le nombre dont il est diviseur, et j'écris en même-tems les nombres $+4$ et $+2$ dans les bandes supérieure et inférieure ; non que ces nombres soient à joindre à x pour servir de diviseurs à la quantité proposée ; mais parce que n'ayant pas encore achevé l'examen des diviseurs, il se pourroit trouver encore d'autres nombres que $+3$ qui auroient les conditions réquises; et qu'il faudroit alors faire de nouvelles suppositions pour reconnoître entre ces nombres ceux qu'il faudroit encore exclure. J'examine maintenant si 3 pris en — ne pourroit pas réussir aussi bien qu'en +, c'est-à-dire, si $x-3$ ne pourroit pas avoir les mêmes conditions pour être diviseur de la proposée ; il faudroit pour cela trouver -2 et -4 par les suppositions de $x=+1$ et $x=-1$: et c'est ce qui arrive en effet ; donc jusqu'à présent $x-3$ a aussi bien les conditions nécessaires pour être diviseur que $x+3$;

j'écris par conséquent dans une cinquième colonne verticale -2, -3, -4.

Je passe enfin à l'examen de 6, et je vois que si je le prends en $+$, il faudroit trouver $+7$ et $+5$ dans les bandes supérieure et inférieure, ce qui n'arrive pas, et si je le prends en $-$, je devrois avoir -5 et -7 dans les mêmes bandes, ce qui ne se trouve pas non plus. Je conclus donc qu'il n'y a que $x-3$ et $x+3$ qui puissent être des diviseurs commensurables et du premier degré de la proposée.

Pour savoir si l'on est autant fondé à tenter la division par $x-3$, que par $x+3$; je remarque que si on faisoit une quatrième bande en supposant $x=-2$, on devroit trouver -5 pour le quatrième terme de la colonne -2, -3, -4; et $+1$ pour le quatrième terme de la colonne $+4$, $+3$, $+2$; car il est clair que le diviseur $x-3$ deviendroit -5 par la supposition de $x=-2$, et que le diviseur $x+3$ deviendroit $+1$ par la même supposition. Mais en faisant $x=-2$ dans la proposée $x^3-2x^2-13x+6$, elle devient 16 qui n'est pas divisible par 5, et qui l'est par 1. Donc $x-3$ ne sauroit être un diviseur de cette quantité, donc s'il y en a un, il ne peut être que $x+3$, ou, ce qui revient au même, si x^3-2x^2-13x

+ 6 a une racine commensurable, elle ne peut être que — 3. Pour savoir si elle l'a effectivement, je divise $x^3 - 2x^2 - 13x + 6$ par $x + 3$, ce qui réussit, et donne pour quotient exact $xx - 5x + 2$.

XV.

Pour que l'uniformité servît à la clarté dans cet exemple, j'ai examiné parmi les diviseurs 1, 2, 3, 6 du nombre 6 venu par la supposition de $x = 0$, le nombre 1 comme les autres ; mais on peut toujours se dispenser de faire aucun examen pour ce nombre, parce que s'il avoit à réussir, soit en +, soit en —, on l'auroit appris déjà en substituant + 1 et — 1 à la place de x dans l'équation donnée.

Dans des nombres aussi simples que 8, 6, 16, il étoit aisé de n'oublier aucun de leurs diviseurs, parce que ces nombres en ont peu. Mais lorsque l'on a des nombres qui ont beaucoup de diviseurs, il faut les chercher avec un certain ordre pour les avoir tous. Un seul exemple suffira pour faire voir comment cette opération doit se faire.

XVI.

Manière d'avoir tous les diviseurs d'un nombre.

Soit proposé de chercher tous les diviseurs du nombre 120. Je commence par tracer une

barre verticale (voyez la case 2, table suivante) à gauche de ce nombre, puis je mets à gauche de cette barre à la hauteur de 120, l'unité comme étant son premier diviseur. J'essaie ensuite de diviser 120 par 2; comme la division réussit, j'écris 2, et je le mets à gauche de la barre à la même hauteur de 60 quotient de la division que je mets à la droite de la même barre.

J'essaie encore la division par 2, qui réussit, et donne 30 pour quotient, je mets alors le nouveau diviseur 2 sous le premier, et 30 sous 60. Je multiplie en même-tems le nouveau diviseur 2 par celui d'en haut 2, et je mets le produit 4 à gauche du second 2, comme étant un nouveau diviseur du nombre proposé 120. La raison de cette multiplication est que si 120 est divisible par 2, et sa moitié par 2, il doit l'être nécessairement par 4.

Comme 30 peut se diviser par 2, j'écris encore 2 à gauche de la barre et à la quatrième ligne, et le quotient 15 à droite sur la même ligne. Je multiplie en même-tems le nouveau diviseur 2 par 4, ce qui me donne 8 pour un nouveau diviseur du nombre proposé. Je ne multiplie pas ce nouveau 2 par les premiers, parce qu'il en viendroit 4 qui est déjà écrit.

15 ne pouvant se diviser par 2, j'essaie de

le diviser par 3, ce qui me réussit et me donne 5 pour quotient que j'écris à droite dans la cinquième ligne aussi bien que le diviseur 3 que j'écris à gauche ; je multiplie ensuite 3 par 2, par 4 et par 8 que je trouve dans les bandes supérieures, et j'écris à gauche du 3 les produits 6, 12, 24, qui sont, comme il est évident, de nouveaux diviseurs du nombre proposé.

5 n'ayant plus d'autre diviseur que lui-même, je l'écris à gauche de la barre dans la sixième ligne, et je mets en même-tems le produit de ce nombre par tous les diviseurs précédens 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, et j'ai 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120, que j'écris dans la même ligne à gauche de 5.

Cela fait, tous les nombres qui sont à gauche de la barre, à compter depuis 1 jusqu'à 120 sont les diviseurs de 120. Il en seroit ainsi des autres nombres dont on chercheroit tous les diviseurs.

XVII.

Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables.

Soit proposé présentement de chercher les racines commensurables de l'équation $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120 = 0$.

Ayant écrit dans une première colonne verticale 1, 0, — 1 (table suivante, case 3) pour

les valeurs à donner successivement à x; et dans une autre colonne verticale les nombres 165, 120, 221 qu'on trouve par la substitution de ces valeurs dans la quantité $x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2 + 22x - 120$, je place dans une troisième colonne les diviseurs de ces trois nombres, ce qui me donne les trois bandes

1, 3, 5, 11, 15, 33, 55, 165,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120;.... 1, 13, 17, 221

que je place chacune vis-à-vis du nombre qui l'a produite. Cela fait, parmi les diviseurs de 120, j'examine en premier lieu si le nombre 2 a les conditions requises, et je vois qu'en le prenant en +, il s'accorde avec les nombres 3 et 1 pris en haut et en bas. J'écris donc dans la quatrième colonne verticale + 3, + 2, + 1.

Je vois ensuite que le même nombre pris en — ne réussit pas, parce qu'il faudroit alors — 3 en bas, ce qui ne se trouve pas.

Parcourant ensuite de la même manière tous les autres diviseurs de 120, je trouve encore le nombre 12 qui étant pris en — a les conditions requises, pourvu qu'on prenne en — les nombres 11 et 13 qui sont au-dessus et au-dessous. J'écris donc dans une cinquième colonne verticale les trois nombres — 11, — 12, — 13.

Pour savoir présentement à laquelle des deux

dernières colonnes je dois m'arrêter, ou plutôt par laquelle des deux quantités $x+2$ ou $x-12$ je dois tenter la division, je remarque que si c'étoit la première, il faudroit trouver zéro en substituant -2 pour x dans l'équation, ce qui n'arrive pas : donc il n'y a que la division par $x-12$ à tenter, je la tente, et elle réussit, en me donnant pour quotient x^4+5x^2-x+10. Ainsi $+12$ est une des valeurs de x dans l'équation donnée et la seule commensurable.

XVIII.

Troisième application de la méthode de trouver les racines commensurables.

Soit enfin $x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36=0$. Ayant écrit (case 4, table suivante) dans une première colonne verticale les valeurs 1, 0, -1 à donner à x; dans une seconde les nombres 30, 36, 40, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions, et dans une troisième tous les diviseurs 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 du nombre 30; les diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 du nombre 36; les diviseurs 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40 du nombre 40; je trouve parmi tous ces diviseurs quatre colonnes qui renferment les conditions requises, la première $+3, +2, +1$, la seconde, $-2, -3, -4$, la troisième, $-3, -4, -5$, la quatrième, $+10, +9,$

Pour décider alors entre ces quatre colonnes, je commence par faire $x = 2$, et j'écris 2 au-dessus de 1 dans la première colonne, j'écris ensuite dans la seconde 74, nombre dans lequel la quantité proposée se change par la supposition de $x = 2$. Cela fait, je vois, sans me donner la peine de chercher les diviseurs de ce nombre, que les deux colonnes $+3, +2, +1$, et $+10, +9, +8$, sont à rejetter; car si la première avoit lieu, il faudroit trouver $+4$ parmi les diviseurs de 74, ce qui n'arrive pas, et si c'étoit la seconde, il faudroit trouver $+11$ parmi les mêmes diviseurs, ce qui n'arrive pas non plus.

Je vois, au contraire, que les nombres -1 et -2 que demandent les colonnes $-2, -3, -4$, et $-3, -4, -5$ sont des diviseurs de 74, j'écris donc les nombres -1 et -2 au-dessus de -2 et de -3 dans la seconde et la troisième colonnes, et je cherche ensuite à exclure encore une de ces deux colonnes $-1, -2, -3, -4$; et $-2, -3, -4, -5$, ce qui devient bien facile, puisque si la première étoit à conserver, il faudroit trouver 0 par la supposition de $x = 3$, ce qui n'arrive pas; au lieu que -1 qui, par la colonne $-2, -3, -4, -5$ doit être un diviseur du nombre donné dans la supposition de $x = 3$,

ne

ne peut pas manquer de l'être. Donc il n'y a de colonne à essayer que — 1, — 2, — 3, — 4, — 5, c'est-à-dire, qu'il n'y a de diviseur à tenter que $x - 4$. J'essaye en effet la division de la quantité proposée par $x - 4$, ce qui réussit et donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$. Ainsi + 4 est une des valeurs de x dans l'équation proposée et la seule commensurable.

XIX.

Après avoir vu comment on pouvoit tirer des équations d'un degré quelconque, les équations commensurables du premier qui en étoient les racines, il étoit naturel de chercher aussi à en tirer les équations du second degré qu'elles pouvoient renfermer : on devoit s'en promettre une aussi grande utilité, la solution des équations du second degré étant aussi complette que celle du premier.

Méthode pour trouver les équations du second degré commensurables dans une équation donnée.

Voici la méthode qu'on a imaginée pour y parvenir. Que $xx + bx + c = 0$ représente l'équation du second degré qui peut être un des produisans d'une équation donnée, ou ce qui revient au même, que $xx + bx + c$, soit le diviseur cherché d'une quantité donnée, en faisant $x = 0$ dans ce diviseur, il est clair qu'il se réduira au nombre c, et que ce nombre sera

un des diviseurs du dernier terme de la quantité donnée.

Si on fait ensuite $x = +1$ dans le diviseur $x^2 + bx + c$, il se changera en $1 + b + c$ qui sera un des diviseurs du nombre que l'on a en faisant de même dans la proposée $x = 1$. Donc si on cherche tous les diviseurs de ce nombre, et qu'après les avoir pris tant en + qu'en —, on en retranche l'unité, ce sera parmi tous les nombres, tant positifs que négatifs, que l'on aura par cette opération que devra se trouver le nombre égal à $b + c$.

Si on fait ensuite $x = -1$ tant dans la quantité proposée, que dans le diviseur $x^2 + bx + c$, qui devient alors $1 - b + c$, on voit qu'en cherchant tous les diviseurs du nombre que devient cette quantité par cette supposition, pris tant en — qu'en +, on aura parmi tous les nombres que ce calcul donnera, après en avoir retranché l'unité, celui qui exprime $-b + c$.

Or, comme c est moyen arithmétique entre $b + c$ et $-b + c$, il s'ensuit que parmi les trois suites de nombres qu'on aura pour représenter $b + c, c, -b + c$, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux qui seront en progression arithmétique. Lorsqu'on aura trouvé trois nombres en progression arithmétique, il est clair que celui qui répondra à la supposition de $x = 0$,

sera celui qu'il faudra prendre pour c; et comme celui qui répondra à la supposition de $x = 1$ représentera $b + c$, il est clair qu'en retranchant le premier du second, on aura b. Substituant ensuite ces deux nombres à la place de b et de c dans $x^2 + bx + c$, on aura un diviseur à tenter pour la quantité donnée, et le seul à essayer, si on n'a trouvé qu'une progression arithmétique pour toutes les suites des nombres qu'ont donnés les diviseurs de la quantité, où l'on a fait successivement $x = 1, 0, -1$. Si on a trouvé plusieurs progressions arithmétiques, on se déterminera entre ces progressions à peu près comme dans le cas des diviseurs simples, en faisant de nouvelles suppositions pour x, comme $-2, -3$, etc. ou $+2, +3$, etc.

Car qu'on suppose, par exemple, $x = -2$, $x = -3$, etc. dans la quantité proposée, il est clair que tous les diviseurs, tant positifs que négatifs du nombre que l'on aura alors, représenteront la quantité $4 - 2b + c$, ou $9 - 3b + c$, etc. que devient $x^2 + bx + c$, lorsque $x = -2$, ou $x = -3$, etc. et que par conséquent tous ces mêmes diviseurs dont on aura retranché 4, 9, etc. représenteront $-2b+c$, $-3b+c$, etc. Or, $-2b+c$, $-3b+c$, etc. étant d'autres termes de la progression arithmétique c, $b+c$, $-b+c$, on n'aura donc plus qu'à

chercher parmi les progressions arithmétiques trouvées précédemment, celle qui se conserve par ces nouvelles valeurs de x, et s'en servir, comme on vient de l'expliquer, pour déterminer les nombres b et a.

XX.

Application de la méthode précédente.

Soit, par exemple, la quantité $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$, dont on cherche un diviseur du second degré.

Je commence par écrire dans une colonne verticale (Table suivante, Case 5) les valeurs 1, 0, — 1 que je veux donner à x. J'écris ensuite dans une seconde colonne verticale, les nombres 1, 21, 65, dans lesquels la quantité proposée se change par ces suppositions.

J'écris de même dans une troisième colonne, à côté du premier nombre, son unique diviseur 1 ; à côté de 21, ses diviseurs 1, 3, 7, 21 ; et à côté de 65, ses diviseurs 1, 5, 13, 65.

Cela fait, j'écris dans une quatrième colonne les nombres 1, 0, 1 quarré de 1, 0, — 1, écrits dans la première colonne et valeurs de xx, et par conséquent, dans les mêmes suppositions de 1, 0, — 1. Enfin, je forme une cinquième colonne par ces conditions ;

la première bande — 2, 0 se forme
1 de 1 pris en —, et de 1 pris

bande soit composée des
- 3, — 1, + 1, + 3,
les diviseurs qui sont
une pour le signe

isième bande
, — 2, 0, + 4,
remiers — 66, — 14,
rouvés en retranchant 1 des
, 5, 1 pris en —, et les autres
+ 12, + 64 en retranchant 1 des
nombres, 1, 5, 13, 65 pris en +.

Pour déterminer ensuite les progressions arithmétiques qui sont dans ces trois suites de nombres, je commence par prendre dans la première bande le nombre — 2 pour le premier terme d'une progression, et je prends successivement pour seconds tous ceux de la seconde bande; je cherche en même-temps les troisièmes termes que ces premiers donneroient, et j'examine quels sont ceux de ces troisièmes qui se trouvent dans la troisième bande: or, — 2 et — 21 doivent donner pour troisième terme — 40 qui n'est point dans la troisième bande, je rejette donc 21; je prends alors — 7 pour

le second terme, et comme il devroit donner — 12 pour troisième terme, et que — 12 n'est pas dans la troisième bande, je rejette encore — 7, et de même — 3, parce que ce dernier devroit donner — 4 qui ne se trouve pas non plus.

A l'égard de — 1, comme il donne 0 pour troisième, et que 0 se trouve dans la troisième bande, j'écris dans la sixième colonne la progression — 2, — 1, 0. De même + 1 pris pour second, donnant + 4 qui se trouve encore, j'écris la seconde progression — 2, + 1, + 4. Et comme + 7 et + 21 devroient donner chacun un troisième terme qui n'est pas dans la troisième bande, je les rejette. Les progressions qui peuvent commencer par 2, étant déterminées, je passe à celles dont le premier terme seroit 0, et pour les trouver, je prends, ainsi que j'ai fait pour 2, tous les nombres de la seconde bande l'un après l'autre.

Je vois d'abord que — 21 devroit donner pour troisième terme — 42, qui n'est pas dans la troisième bande; je vois ensuite que — 7 donne — 14 qui se trouve : ainsi j'écris encore la progression 0, — 7, — 14. De même — 3 et — 1 donnant — 6 et — 2, qui se trouvent aussi; j'écris les progressions 0, — 3, — 6, et 0, — 1, — 2. A l'égard des nombres + 1, + 3 + 7,

+ 21, ils ne donnent aucun troisième terme qui se trouve, ainsi je les rejette.

Pour voir présentement lesquelles de ces progressions il faut encore rejetter, je fais $x = -2$, et j'écris — 2 dans la première colonne ; en observant de mettre en même-temps, 1°. dans la seconde colonne, 125 que donne la quantité proposée par cette valeur de x. 2°. Dans la troisième les nombres 1, 5, 25, 125, diviseurs de 125. 3°. Dans la quatrième colonne le nombre 4 quarré de — 2 et valeur de xx dans cette supposition. 4°. Dans la cinquième colonne les nombres — 129, — 29, — 9, — 5 que l'on a en retranchant 4 des nombres 125, 25, 5, 1 pris en —, et les nombres — 3, + 1, + 21, + 121 que l'on a en retranchant 4 des mêmes nombres 1, 5, 25, 125 pris en +.

Par ce moyen, je vois que les deux progressions — 2, + 1, + 4, et 0, — 7, — 14 sont à rejetter, parce qu'elles devroient donner pour quatrièmes termes + 7 et — 21 qui ne se trouvent pas dans la quatrième bande.

Mais les trois progressions — 2, — 1, 0 ; 0, — 3, — 6 ; 0, — 1, — 2, devant donner pour quatrièmes termes + 1, — 9, — 3 qui se trouvent dans cette quatrième bande, j'ai besoin d'une nouvelle supposition pour exclure au moins une de ces trois progressions.

Je fais donc $x = -3$, ce qui me donne 147 pour le nombre dans lequel se change la quantité proposée par cette supposition. J'écris donc 147 dans la seconde colonne, et à côté, dans la troisième, ses diviseurs 1, 3, 7, 21, 49, 147; je mets de même dans la quatrième colonne 9 quarré de — 3, ou la valeur de xx dans la nouvelle supposition; enfin j'écris dans la cinquième colonne les nombres — 156, — 58, — 30, — 16, — 12, — 10, — 8, — 6, — 2, + 12, + 40, + 138, que l'on a en retranchant 9 des nombres 1, 3, 7, 21, 49, 147 pris en — et en +.

Par-là je trouve que les progressions — 2, — 1, 0, + 1 et 0, — 1, — 2, — 3, doivent être rejettées, et qu'au contraire il faut conserver la progression 0, — 3, — 6, — 9; car les deux cinquièmes termes des premières progressions doivent être + 2 et — 4 qui ne se trouvent pas dans la cinquième bande, au lieu que le cinquième terme de la progression 0, — 3, — 6, — 9 est — 12 qui s'y trouve.

Après avoir réduit toutes les progressions à la seule 0, — 3, — 6, etc. je prends dans cette progression le nombre — 3 qui, dans la sixième colonne, répond à la supposition de $x = 0$, pour exprimer le terme c du diviseur cherché $xx + bx + c$. Je prends ensuite, tou-

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Case 1. 2.

$x^3 - 2x^2 - 13x + 6$

1	8	1 . 2 . 4 . 8	+4 −2
0	6	1 . 2 . 3 . 6	+3 −3
−1	16	1 . 2 . 4 . 8 . 16	+2 −4
−2	16		+1

$x^5 - 12x^4 + 5x^3 - 61x^2$ 3.

1	165	1 . 3 . 5 . 11 . 15 . 33 . 55
0	120	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 8
−1	221	1 . 13 . 17 . 221

$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x$ 4.

2	74	
1	30	1.2.3.5.6.10.15.30
0	36	1.2.3.4.6. 9 .12.18.36
−1	40	1.2.4.5.8.10.20.40

$x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 3$ 5.

1	1	1	1	−2,0	0 | 0
0	21	1.3.7.21	0	−21,−7,−3	−3 | −1
−1	65	1.5.13.65	1	−66,−14,−6	−6 | −2
−2	125	1.5.25.125	4	−129,−25,−9	−9 | −3
−3	147	1.3.7.21.49.147	9	−156,−52,−12	−12 |

jours dans la sixième colonne, o qui répond à la supposition de $x = 1$, et qui, suivant les principes précédens, doit être $b + c$; ainsi retranchant c du -3 de o, ou $b + c$, j'ai $+3$ pour b, et partant le diviseur cherché $x^2 + bx + c$ est $xx + 3x - 3$, s'il y en a un du second degré.

Pour savoir ce qui en est, je divise la quantité proposée $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21$ par $xx + 3x - 3$, et je trouve qu'en effet la division est exacte, et donne pour quotient $x^3 + 5x - 7$.

XXI.

Autre application de la méthode précédente.

Soit présentement la quantité $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5$, je commence par écrire (Table ci-jointe, Case 1) dans une première colonne verticale les valeurs 2, 1, o, -1, -2 que je veux donner à x. J'écris ensuite dans la seconde colonne verticale les nombres 133, 33, 5, 1, 3 dans lesquels la quantité se change par ces suppositions.

Dans la troisième, j'écris vis-à-vis de ces nombres tous leurs diviseurs. Dans la quatrième les valeurs 4, 1, o, 1, 4 de xx dans les suppositions faites pour x à la première colonne.

Enfin dans la cinquième colonne j'écris, pour

la première bande, les nombres — 137, — 23, — 11, — 5, — 3, + 3, + 15, + 129 trouvés en retranchant 4 des nombres 133, 19, 7, 1 pris d'abord en — et ensuite en +. De même dans la seconde bande, les nombres — 34, — 12, — 4, — 2, 0 + 2, + 10, + 32, produits en retranchant 1 des nombres 33, 11, 3, 1 pris d'abord en —, puis en +, et ainsi des autres bandes. Tous ces nombres écrits, je commence par prendre dans la cinquième bande de la cinquième colonne, le premier nombre — 7 pour servir de premier terme d'une progression, et prenant en même-temps — 2 dans la quatrième bande pour servir de second, je vois que le troisième devroit être + 3, et qu'il ne se trouve pas dans la troisième bande; ainsi je passe à 0 qui, en prenant toujours — 7 pour premier terme, donneroit + 7, pour troisième terme, et comme + 7 n'est pas non plus dans la troisième bande, je conclus qu'il n'y a point dans les nombres de la cinquième colonne, de progression qui puisse commencer par — 7.

Je prends donc — 5 pour premier terme, et je vois qu'en lui donnant — 2 pour second, le troisième seroit + 1 qui se trouve bien dans la troisième bande, mais qui donne pour quatrième terme + 4, qui n'est pas dans la seconde bande, ainsi je laisse — 2, et je prends 0 pour second

terme, ce qui me donne alors + 5, + 10, + 15, pour troisième, quatrième et cinquième termes, et comme tous ces nombres se trouvent dans la troisième, la seconde et la première bandes, j'écris dans la sixième colonne les nombres 15, 10, 5, 0, — 5.

Prenant ensuite — 3 pour premier terme, je vois que ni — 2, ni 0 ne peuvent lui servir de seconds termes, parce que le premier donneroit la progression — 3, — 2, — 1, 0, + 1 dont le dernier terme n'est point dans la première bande; et que le second donneroit la progression — 3, 0, + 3, etc. qui manque dès le troisième terme + 3 qui ne se trouve point dans la troisième bande.

Il ne me reste plus qu'à prendre — 1 pour premier terme, je lui donne d'abord — 2 pour second qui ne réussit pas, mais lui donnant ensuite 0, j'ai pour troisième, quatrième, cinquième termes, les nombres + 1, + 2, + 3 qui sont dans la troisième, seconde et première bandes; j'écris donc dans la sixième colonne les nombres + 3, + 2, + 1, 0, — 1.

Cela fait, je ne cherche point à donner de nouvelles valeurs à x pour exclure une de ces deux progressions, parce que la quantité donnée étant du quatrième degré, doit ou n'avoir aucun diviseur du second degré, ou en avoir deux à la

fois, ce qui se tire de ce qu'aussitôt qu'on aura trouvé un diviseur du second degré à une quantité du quatrième, le quotient qui est toujours un diviseur en même-temps, sera aussi du second degré.

Suivant cette réflexion, je prends indifféremment l'une ou l'autre des deux progressions précédentes ; la première, par exemple, dans laquelle 5 étant ce qui répond à la supposition de $x = 0$, et 10 ce qui répond à la supposition de $x = 1$; j'ai $c = 5$ et $b + c = 10$, c'est-à-dire, $b = 5$. D'où le diviseur que donne cette progression est $xx + 5x + 5$. Je divise donc la quantité proposée par $xx + 5x + 5$, et je vois que la division réussit et donne pour quotient $xx + x + 1$ qui est le diviseur qu'on trouveroit par l'autre progression.

XXII.

Méthode pour trouver les diviseurs du premier degré, lorsque l'x doit avoir un coëfficient.

Lorsqu'il sera question de trouver les diviseurs d'une équation telle que $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20 = 0$, dont le premier terme aura un coëfficient qui n'aura pas disparu, en divisant toute l'équation par ce coëfficient, on pourra se servir des principes précédens, sans être obligé de changer cette équation en une autre qui n'ait point de coëfficient au

premier terme, comme on le pourroit faire par la méthode de l'article IX.

Pour le faire voir, examinons d'abord ce qui regarde les diviseurs du premier degré. Que $mx + a$ représente celui qui doit diviser une quantité quelconque donnée. Il est clair que si on fait x successivement égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, etc. ce diviseur deviendra, dans tous ces cas, $2m + a$, $m + a$, a, $— m + a$, $— 2m + a$, etc. qui sont des quantités en progression arithmétique, dans lesquelles il est aisé de remarquer,

1°. Que la différence m de tous les termes est le coëfficient de x dans le diviseur.

2°. Que cette même différence m est un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée;

3°. Que le terme a répondant à la supposition de $x = 0$, est la partie délivrée d'x du diviseur;

4°. Que les mêmes quantités en progression arithmétique seront des diviseurs de la quantité donnée, dans laquelle on aura fait successivement x égal à 2, 1, 0, — 1, — 2, etc.

Cela posé, lorsqu'il faudra chercher les diviseurs du premier degré d'une quantité quelconque donnée, on suivra d'abord le même procédé que ci-dessus pour les trois premières

colonnes, on cherchera ensuite, parmi tous ces nombres, quelque progression dont la différence soit un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Enfin, pour employer cette progression, on substituera dans $mx + a$, à la place de a le terme de la progression qui répondra à la supposition de $x = 0$, et à la place de m le nombre que l'on aura en retranchant un terme quelconque de la progression, de celui qui est au-dessus.

XXIII.

Application de cette méthode à un exemple.

Supposons, par exemple, que l'on cherche les diviseurs de la quantité

$$6x^4 - x^3 - 21x^2 + 3x + 20.$$

Je range à l'ordinaire dans la première colonne les suppositions 2, 1, 0, — 1, — 2, à faire pour x. Dans la seconde, les nombres 30, 7, 20, 3, 34, que devient successivement la quantité donnée par ces suppositions, et enfin dans la troisième tous les diviseurs de ces nombres.

Cela fait, afin de découvrir parmi tous les nombres de la troisième colonne, quelque progression qui serve à reconnoître le diviseur cherché, je commence par examiner le premier nombre 1 de la première bande, et je vois

d'abord que si on lui donne pour second le premier nombre 1 de la seconde bande, la progression 1, 1, 1, etc. qui en vient, ne peut pas être admise, puisqu'elle ne sauroit représenter le diviseur cherché $mx + a$ qui doit varier nécessairement par les différentes valeurs de x. Je vois de même que 7 ne sauroit être pris pour le second; car le troisième terme que produiroit cette supposition seroit 13 qui ne se trouve pas dans la troisième bande.

Prenant ensuite 1 en —, je vois que 1 de la seconde ne lui sauroit servir de second terme, parce que le troisième seroit 3, qui n'est pas dans la troisième bande. A l'égard de 7, il est inutile de chercher si le troisième terme qu'il donneroit se trouve dans la troisième bande, puisque la différence de — 1 à 7 est 8, qui n'est pas un diviseur du coëfficient du premier terme de la quantité proposée. Donc 1, soit qu'on le prenne en +, ou qu'on le prenne en —, est à rejetter.

Parcourant de la même manière tous les autres nombres de la première bande, je ne trouve que 10 qui puisse avoir les conditions convenables. Lui donnant 7 pour second terme, il donne la progression 10, 7, 4, 1, — 2 dont la différence est 3, diviseur du coëfficient de $6x4$.

Ayant donc écrit cette progression dans la quatrième colonne, je prends le terme + 4 qui répond à la supposition de $x = 0$ pour exprimer la partie a du diviseur cherché, et retranchant le même terme + 4 du terme supérieur + 7 qui représente $m + a$, j'ai + 3 pour exprimer m, c'est-à-dire, que le diviseur cherché, s'il doit y en avoir un, ne peut être que $3x + 4$. Je tente donc la division par cette quantité, elle réussit, et me donne pour quotient $2x^3 - 3x^2 - 3x + 5$.

XXIV.

Méthode pour trouver les diviseurs du second degré, lorsque l'x doit avoir un coëfficient.

Examinons présentement les cas où les diviseurs doivent être du deuxième degré. Soit pris $mx^2 + bx + c$ pour représenter le diviseur cherché d'une quantité donnée; il est clair, comme ci-dessus, que le dernier terme c sera un diviseur du dernier terme de la quantité donnée, et que m sera un diviseur du coëfficient de la plus haute puissance de x dans la quantité donnée.

Choisissant donc d'abord pour représenter m un des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée, et faisant la même opération que dans l'article XIX, à cela près, qu'au lieu de retrancher les quarrés 16, 9, 4, etc. on

retranche

retranche le produit de ces mêmes quarrés par le nombre qu'on aura choisi pour m, on trouvera de même b et c.

Si le diviseur que l'on a ainsi, en mettant dans $mx^2 + bx + c$, pour m le nombre choisi, et, pour b, c, ceux qui auront été déterminés d'après ce choix, ne réussit pas, on prendra un autre des diviseurs du coëfficient du premier terme de la quantité donnée pour représenter m, et l'on achèvera le calcul de la même manière. Si après avoir essayé tous les diviseurs du coëfficient du premier terme, il arrivoit qu'on ne trouvât pas de diviseur par cette méthode, on seroit sûr que la quantité proposée n'en devoit point avoir.

XXV.

Application de cette méthode à un exemple.

Soit prise, pour faire une application de cette méthode, la quantité $4x^5 + 16x^4 - 22x^3 - 14x^2 - 56x + 77$ dont on demande un diviseur du second degré. Ayant d'abord placé à l'ordinaire (Table suivante, Case 3) dans la première colonne les nombres 2, 1, 0, -1, -2, etc. auxquels on égale successivement x; dans la seconde, les nombres 117, 5, 77, 153, 437 que devient successivement la quantité proposée par ces valeurs de x; dans la troisième, tous les diviseurs des nombres de la seconde : je

commence par chercher, suivant les règles de l'art. XIX, s'il y a quelque diviseur du second degré, dont le premier terme ait l'unité pour coëfficient; mais n'en trouvant point, je suppose que m, c'est-à-dire, le coëfficient du premier terme du diviseur, soit 2 qui est un des diviseurs du coëfficient 4 du premier terme de la quantité donnée.

Je place alors dans la quatrième colonne, au lieu des quarrés des nombres de la première, le produit de ces mêmes quarrés par 2 valeur supposée de m, c'est-à-dire, que j'écris dans la quatrième colonne les nombres 8, 2, 0, 2, 8. Je retranche ensuite ces nombres de tous ceux de la troisième colonne pris en — et en +, ce qui me donne pour la première bande de la cinquième colonne — 125, — 47, — 21, — 17, — 11, — 9, — 7, — 5, + 1, + 5, + 31, + 109; pour la seconde bande — 7, — 3, etc.

Tous ces nombres écrits, je cherche toujours, comme ci-devant, des progressions arithmétiques parmi tous ces termes, et je ne trouve que la progression + 5, — 3, — 11, — 19, — 27 que j'écris dans la sixième colonne: cela fait, je prends — 11 répondant à zéro pour exprimer le nombre c, et retranchant ce nombre de — 3 qui est au-dessus, j'ai le reste + 8 pour

exprimer b. Le diviseur qui résulte donc de la supposition de $m = 2$ est $2x^2 + 8x - 11$; j'essaie alors la division qui réussit en donnant pour quotient $2x^3 - 7$, et sans prendre la peine de faire le calcul que demanderoit la supposition de $m = 4$, je vois qu'il ne doit pas réussir, parce qu'il faudroit pour cela que le quotient $2x^3 - 7$ pût se décomposer, ce qui est impossible. Ainsi la quantité proposée n'a pas d'autre diviseur du second degré, que $2x^2 + 8x - 11$.

XXVI.

Toute quantité donnée qui ne monte pas au sixième degré, et qui a des diviseurs, en doit avoir d'un degré moins élevé que le troisième.

Lorsqu'on cherchera les diviseurs d'une quantité qui ne passera pas le cinquième degré, on pourra toujours les trouver par les méthodes précédentes; car aussitôt qu'on se sera assuré par ces méthodes que cette quantité n'aura point de diviseur, ni du premier, ni du second degré, on sera sûr aussi qu'elle n'en aura pas du troisième.

XXVII.

Si la quantité monte au sixième degré ou au-delà, elle pourroit n'avoir de diviseurs que du troisième ou du quatrième.

Mais si la quantité proposée s'élève au sixième degré ou au-delà, elle pourroit n'être décomposable qu'en des quantités d'un degré plus élevé que le second. La méthode qu'il faudroit suivre pour trouver ces diviseurs, est fondée à peu près sur les mêmes principes que les précé-

dens ; je ne m'arrête point à l'expliquer à cause de la longueur des calculs.

XXVIII.

Tout ce que nous venons de dire sur les diviseurs commensurables, ne regarde que les équations numériques ; cependant les équations littérales pouvant aussi avoir des diviseurs commensurables, il faut voir ce que l'on doit faire pour les trouver.

Supposons d'abord que l'équation ne renferme qu'une lettre connue avec l'x, et que cette équation soit ce que l'on appelle homogène ; c'est-à-dire, que tous ses termes renferment, indépendamment des coëfficiens numériques, le même nombre de facteurs, telle seroit l'équation $x^3 - ax^2 - 10a^2x + 6a^3$, par exemple. On n'aura qu'à substituer l'unité à la place de la lettre connue a de cette équation, et chercher ses diviseurs de la même manière que ci-dessus. Ces diviseurs étant trouvés, s'ils sont du premier degré, on remettra la lettre a à côté du nombre qui sert de second terme. Si le diviseur est du second degré, on placera a après le coëfficient du second terme, et aa après le nombre qui sert de troisième terme.

Soit, par exemple, la quantité $x^3 + 4ax^2$

$-17a^2x-12a^3$; après avoir fait $a=1$, et trouvé que la quantité $x^3+4x^2-17x-12$, qui vient par cette opération, a pour diviseur $x-3$, je conclus que $x-3a$ est un diviseur de la quantité proposée.

Qu'on ait ensuite $2x^5+5ax4-3a^2x^3-8a^3x^2-20a^4x+12a^5$. En supposant $a=1$, on aura $2x^5+5x4-3x^3-8x^2-20x+12$ qui donne pour diviseur du second degré $2x^2+5x-3$. Mettant alors dans ce diviseur a à côté de 5, et aa à côté de 3, il vient $2x^2+5ax-3aa$ pour le diviseur du second degré de $2x^5+5ax4-3a^2x^3-8a^3x^2-20a^4x+12a^5$.

XXIX.

Dans une équation homogène et qui est affectée de trois lettres, on pourroit, en suivant les méthodes précédentes, parvenir encore à trouver ses diviseurs, tant du premier degré que du second ; mais à l'aide de quelques observations de calcul qui se présentent assez naturellement, on peut réussir d'une façon un peu plus commode.

Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois.

Supposons d'abord que la quantité donnée qui renferme trois lettres a, b, x dût avoir pour diviseur une quantité qui n'en renfermât que deux, que les lettres x, et a, par exem-

ple. Puisque ce diviseur, quel qu'il soit, pourra, sans contenir de b, diviser la quantité donnée où b entre, il faut que la valeur de b soit indifférente à la division, et que cette division puisse se faire de même lorsque b sera zéro. Donc si on fait $b = 0$ dans la quantité donnée, il faudra que la quantité donnée par cette supposition ait pour commun diviseur avec la quantité entière, le diviseur cherché. La question est donc en ce cas renfermée dans une autre, traitée dans la première partie, art. LXXIII, où l'on a enseigné à trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités données : de sorte que par ce qu'on a enseigné dans cet article, on trouvera le diviseur cherché de quelque degré qu'il soit, pourvu qu'il n'ait que deux lettres.

XXX.

Exemple. Pour montrer l'application de cette méthode, soit prise d'abord la quantité $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + abbx + a^4 + aabb$, dont on cherche un diviseur où les seules lettres a, x entrent.

En faisant $b = 0$ il vient $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$ dont le plus grand commun diviseur avec la quantité entière, ou, ce qui revient au même, avec le reste $abbx + aabb$,

est $x + a$, qui est donc nécessairement un diviseur de la quantité donnée, et le plus grand qu'elle puisse avoir qui ne contienne pas de b.

XXXI.

Soit $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 4a^3x^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$; en faisant $b = 0$ dans cette quantité, on a $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - 4a^3x^2$ dont il faut chercher le plus grand commun diviseur avec la quantité proposée, ou, ce qui revient au même, avec le reste $-abx^3 + abbx^2 + 2aabx^2 - 2aabbx - 2a^3bx + 2a^3bb$, c'est-à-dire, le plus grand commun diviseur des quantités $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$ et $-x^3 + bx^2 + 2ax^2 - 2abx - 2aax + 2aab$.

Or, s'il y a un diviseur commun entre ces deux quantités qui ne contienne pas de b, il sera aussi commun aux deux parties $-x^3 + 2ax^2 - 2a^2x$ et $bx^2 - 2abx + 2a^2b$ de la dernière de ces deux quantités; mais le diviseur commun de ces deux parties ne peut être que $xx - 2ax + 2a^2$, j'examine donc s'il divise aussi $x^3 - 4ax^2 + 6aax - 4a^3$, et comme il le divise en effet, je conclus qu'il est le diviseur cherché de la quantité proposée.

XXXII.

Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres et du premier degré.

Supposons présentement que la quantité proposée, composée de trois lettres dont on cherche les diviseurs, n'en ait aucun composé seulement de deux lettres, ou bien que si elle en renferme, on ait commencé par les trouver, et les mettre à part. Pour trouver alors les diviseurs de trois lettres et du premier degré qu'elle peut avoir, je commence par représenter ce diviseur par $mx + na + pb$, m, n, p étant supposés désigner des nombres. Je remarque ensuite que si on fait successivement, a, x, b égaux à zéro dans ce diviseur, on a les trois quantités $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ telles que les deux termes que chacune d'elles renferme, se trouvent répétés dans les deux autres quantités. $mx + pb$, par exemple, donné par la supposition de $a = 0$, est composé de mx qui se trouve dans $mx + na$ donné par la supposition de $b = 0$, et de pb qui se trouve dans $na + pb$ donné par la supposition de $x = 0$. Je vois en même temps que la somme de ces trois quantités $mx + na$, $mx + pb$, $na + pb$, est le double du diviseur entier $mx + na + pb$.

Or, comme ces trois quantités sont nécessairement des diviseurs de celle que l'on auroit

en faisant les mêmes suppositions de a, x, b égaux à zéro, dans la quantité proposée; on tire de là, que pour trouver les diviseurs de cette quantité qui ne montent qu'au premier degré, et contiennent trois lettres, il faut commencer par écrire séparément les trois quantités, dans lesquelles la proposée se change par la supposition de a, x, b égaux à zéro; écrire ensuite à côté de chacune de ces nouvelles quantités tous ses diviseurs du premier degré, et à deux lettres. Cela fait, il faut choisir trois diviseurs parmi ces trois classes de diviseurs à deux lettres, en observant les conditions dont nous venons de parler, que les deux termes dont chacun de ces diviseurs sera composé, se trouvent dans les deux autres diviseurs. Ces trois diviseurs étant ainsi trouvés, la moitié de leur somme sera le diviseur de la quantité proposée, si elle en a un.

Si pour trouver dans un de ces trois diviseurs de deux lettres, les deux termes qui doivent être la répétition de ceux qui sont dans les deux autres, il falloit en changer les deux signes à la fois; on voit bien que ce changement seroit permis, puisqu'en général une quantité qui en divise une autre, la divisera encore, si on en change tous les signes.

XXXIII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit proposée la quantité $2x^3+7ax^2-3bx^2+5a^2x-3abx+4b^2x+10abb-6b^3$. Ayant d'abord écrit (voyez la table ci-jointe, case 1) dans une colonne verticale les trois quantités $10ab^2-6b^3$; $2x^3-3bx^2+4bbx-6b^3$; $2x^3+7ax^2+5a^2x$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x,a,b, égaux à zéro, je place dans une seconde colonne verticale vis-à-vis de chacune de ces trois quantités, leurs diviseurs à deux lettres et du premier degré. La première fournit $5a-3b$ et $10a-6b$; la seconde seulement $2x-3b$, et la troisième $2x+5a$. Cela fait, je vois tout de suite que si des deux diviseurs $5a-3b$, $10a-6b$, on prend le premier $5a-3b$; il aura avec les deux diviseurs $2x-3b$, $2x+5a$, la propriété requise. Car ce premier diviseur $5a-3b$ contient $5a$ qui est répété dans le diviseur $2x+5a$ et et $-3b$ qui est répété dans $2x-3b$; de même $2x-3b$ contient $2x$ qui est répété dans $2x+5a$, et $-3b$ qui est répété dans $5a-3b$; enfin, $2x+5a$ est composé de $2x$ et de $+5a$, qui sont répétés dans les deux autres diviseurs $5a-3b$, $2x-3b$.

J'ajoute donc, suivant la règle précédente,

ces trois diviseurs, et j'ai $4x - 6b + 10a$, dont la moitié $2x - 3b + 5a$ est le diviseur cherché. En effet, si on tente la division, on trouve pour quotient $x^2 + ax + 2bb$.

XXXIV.

Soit proposé maintenant de trouver les diviseurs du premier degré, et à trois lettres de la quantité $8x^4 - 2ax^3 - 10bx^3 - 3a^2x^2 - 5abx^2 - 12ab^2x + 9a^2b^2 + 15ab^3$. Ayant fait successivement x, a, b égaux à zéro dans cette quantité, j'ai les trois quantités $9a^2b^2 + 15ab^3$, $8x^4 - 10bx^3$, $8x^4 - 2ax^3 - 3a^2x^2$ que j'écris (voyez la case seconde de la table ci-jointe) l'une sous l'autre dans une colonne verticale. J'écris dans une autre colonne verticale à côté de chacune de ces quantités, leurs diviseurs du premier degré, et à deux lettres; ceux de la première sont $3a + 5b$ et $9a + 15b$; ceux de la seconde $4x - 5b$, $8x - 10b$; et ceux de la troisième $4x - 3a$ et $2x + a$. Autre exemple.

Il n'est pas difficile ensuite de trouver que les trois diviseurs $3a + 5b$, $4x - 5b$, et $4x - 3a$ ont les propriétés requises, pourvu qu'on prenne le premier $3a + 5b$ en changeant ses signes, c'est-à-dire, en l'écrivant ainsi $-3a - 5b$; je mets donc à part ces trois diviseurs dans la

quatrième colonne ; je les ajoute, et je prends la moitié de la somme, ce qui me donne $4x - 3a - 5b$ pour le seul diviseur cherché, supposé qu'il y en ait un. Je tente la division, et je trouve pour quotient exact

$$2x^3 + ax^2 - 3ab^2.$$

XXXV.

Dans ces deux exemples nous n'avons point écrit les diviseurs d'une lettre que donnoit chacune des trois quantités de la première colonne, parce que ces diviseurs n'auroient jamais pu être les quantités dans lesquelles le diviseur à trois lettres se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro, et que nous avons supposé qu'on s'étoit assuré par la méthode de l'art. XXIX que la quantité proposée n'avoit pas de diviseurs à deux lettres. Mais si on avoit des quantités qui eussent de ces sortes de diviseurs, et qu'on ne voulût pas se servir de la méthode de l'art. XXIX, on pourroit les trouver en même tems que ceux à trois lettres, par la même méthode que nous venons d'expliquer, pourvu que ces diviseurs ne fussent non plus que du premier degré.

Troisième exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même-tems que ceux à trois.

Soit, par exemple, la quantité $16x^3 + 16bxx - 48axx + 35aax - 16abx - 6a^2x + 3a^2b$. Ayant écrit dans une première colonne (voyez la Case 3 de la Table ci-jointe)

les trois quantités $-6a^3+3a^2b$, $16x^3+16bxx$, $16x^3-48axx+35a^2x-6a^3$, dans lesquelles cette quantité se change par la supposition de x, a, b égaux à zéro ; j'écris dans la seconde colonne, et à la première bande, a, $3a$, $-2a+b$, $-6a+3b$ diviseurs du premier degré et à une ou deux lettres de la quantité $-6a^3+3a^2b$. De même, dans la seconde bande, j'écris les diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$, $x+b$, $2x+2b$, $4x+4b$, $8x+8b$, $16x+16b$, de la seconde quantité $16x^3+16bxx$: et dans la troisième bande, $a-4x$, $3a-4x$, $x-2a$ diviseurs de la troisième quantité $16x^3-48ax^2+35a^2x-6a^3$.

Cela fait, à cause du grand nombre de ces diviseurs, il faut plus d'attention que dans les exemples précédens, pour n'en laisser aucun qui puisse avoir les conditions requises. Quant à l'ordre qu'on doit suivre, il est à peu près le même que celui qu'on a suivi dans les diviseurs numériques. Il faut donc comparer le premier de la première bande avec tous ceux des autres bandes, et faire ensuite la même opération pour chacun des autres diviseurs de la première bande. Je vois d'abord que si a fait partie d'un diviseur de la quantité, ce ne peut être que d'un diviseur qui ne contienne que a

et x, parce que, s'il y avoit un terme qui contînt b, ce diviseur ne se seroit pas réduit à a par la supposition de $x = 0$. Ainsi je n'ai à choisir dans ce cas que parmi les cinq premiers diviseurs x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$. Or, comme de tous ces diviseurs, il n'y a que $4x$ qui soit répété dans la troisième bande, (pourvû que ce diviseur $4x$ soit affecté du signe —), et qu'en même tems de tous les diviseurs de la troisième bande, il n'y a que le premier $a - 4x$ qui renferme le même terme a de la première bande; je conclus que si a fait partie d'un diviseur, il faut que ce diviseur soit $a - 4x$; je l'écris donc à part. Je passe alors à $3a$, et comme je le trouve répété dans le diviseur $3a - 4x$ de la troisième bande, et que l'autre terme $4x$ du même diviseur se trouve être un des diviseurs de la seconde bande, en changeant le signe de ce diviseur; je conclus que $3a - 4x$ peut être encore un diviseur de la quantité proposée, et je le mets à part afin de l'essayer.

Quant à $-2a + b$, on voit d'abord qu'il ne peut pas seul être un diviseur de la quantité proposée, parce qu'il faudroit pour cela que parmi les diviseurs de $16x^3 + 16bxx$, on eût le terme b que deviendroit $-2a + b$ par la supposition de $a = 0$. Reste donc à savoir s'il ne feroit pas partie d'un diviseur où x entreroit.

Pour m'en assurer, je commence par remarquer que de tous les diviseurs de la seconde bande, il n'y a que $x + b$ avec lequel on puisse le comparer, parce que c'est le seul diviseur qui ait le terme $+ b$ de commun avec lui. Je vois aussi qu'il n'y a que $x - 2a$ de la troisième bande avec lequel je puisse comparer le même diviseur $- 2a + b$, parce qu'il est le seul qui contienne le terme $- 2a$. Je remarque enfin que de même que les deux termes du diviseur $- 2a + b$ sont répétés dans les deux autres diviseurs $x + b$, $x - 2a$, le diviseur $x + b$ a aussi ses deux termes répétés dans les deux autres $- 2a + b$, $x - 2a$, et réciproquement que les deux termes du diviseur $x - 2a$ sont répétés dans les deux autres $x + b$, $- 2a + b$. De-là, je conclus que les trois diviseurs $- 2a + b$, $x + b$, $x - 2a$ ont les conditions nécessaires pour former un diviseur. Je les ajoute donc, et je mets à part la moitié $x - 2a + b$ de leur somme pour un diviseur à tenter. Mais avant d'en faire le calcul, j'examine ce que peut me donner le diviseur $- 6a + 3b$; je vois tout de suite qu'il n'y a aucun de ses deux termes qui soit répété parmi les diviseurs des autres bandes, et qu'ainsi il faut le rejetter.

Par cet examen, on trouve donc les trois di-

viseurs $a - 4x$, $3a - 4x$, $x - 2a + b$ à essayer; je tente la division par le dernier, elle réussit, et me donne pour quotient $3aa - 16ax + 16xx$, que je divise ensuite par $3a - 4x$. La division réussit encore, et me donne pour quotient le premier diviseur $a - 4x$. Ainsi la quantité proposée étoit le produit de ces trois diviseurs.

XXXVI.

Méthode pour trouver les diviseurs du second degré et à trois lettres.

Si la quantité proposée n'a point de diviseur du premier degré, et qu'on veuille examiner si elle n'en a point du second, on y parviendra assez facilement à l'aide de quelques observations analogues à celles sur lesquelles la méthode précédente est fondée. Soit pris $mxx + nax + pbx + qa^2 + rab + sbb$ pour représenter le diviseur cherché du second degré; faisant successivement $x = 0$, $a = 0$, $b = 0$ dans ce diviseur, j'ai les trois quantités

$$qa^2 + rab + sbb$$
$$mx^2 + pbx + sbb$$
$$mx^2 + nax + qa^2$$

qui sont toutes trois des diviseurs de celle que devient la proposée, lorsqu'on y fait successivement les mêmes suppositions de x, a, b égaux

égaux à zéro. De plus, chacun de ces diviseurs est toujours tel, que les termes affectés de lettres quarrées sont toujours répétés dans les deux autres diviseurs, tandis que les termes qui contiennent un produit de deux lettres, sont toujours les seuls de leur espèce. Voilà donc des conditions pour examiner les trois classes de diviseurs de deux lettres et du second degré qu'on tirera d'une quantité proposée ; ainsi, quand on en aura trouvé trois qui rempliront ces conditions, on n'aura qu'à les ajouter, prendre ensuite la moitié de tous les termes affectés de quarrés, et laisser en entier ceux qui n'en contiendront pas.

XXXVII.

Application de cette méthode à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, soit la quantité $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 - a^3x^2 - 14ab^2x^2 + 3b^4x - a^4x - 3a^3b^2$, laquelle n'a aucun diviseur du premier degré, et dont on cherche quelque diviseur du second.

On reprendra d'abord (voyez la première case de la Table ci-jointe) les trois quantités $-3a^3b^2$, $x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$; $x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x$ qu'on n'aura pas manqué de tirer de cette quantité, en faisant successivement x, a, b égaux

à zéro, lorsqu'on aura voulu s'assurer qu'elle n'avoit point de diviseurs du premier degré. On mettra ensuite à côté de ces quantités leurs diviseurs du second degré ; la première fournissant a^2, ab, b^2, $3a^2$, $3ab$, $3bb$; la seconde $x^2 + 3b^2$, $x^2 + b^2$; la troisième seulement $x^2 + ax$. Dans cette méthode on ne sauroit rejetter les diviseurs qui n'ont qu'un terme, quand même on se seroit assuré que la quantité proposée n'a aucun diviseur à deux lettres, parce qu'un diviseur à trois termes et du second degré, peut se réduire à un seul terme par la supposition de l'une des lettres égale à zéro.

Il s'agit présentement d'examiner tous les diviseurs de la première bande ; je vois d'abord que le premier a^2 est à rejetter, parce que ce quarré ne se trouve point répété dans les autres bandes. Je passe ensuite à ab et de ce que ce diviseur ne contient aucun terme affecté de aa et de bb, je conclus que le diviseur, dont il pourroit faire partie, ne peut avoir, outre ce terme, que des xx, des ax et des bx ; et comme cette raison exclud la comparaison qu'on pourroit faire de ab avec les diviseurs $x^2 + 3b^2$, $x^2 + b^2$, il s'ensuit que si ab doit faire partie d'un diviseur de la proposée, ce diviseur ne peut être que $xx + ax + ba$: mais je vois en

même-temps que $xx + ax + ba$ ne sauroit être un diviseur de la proposée, puisqu'il deviendroit seulement xx par la supposition de $a=0$, et que xx n'est point un des diviseurs de la seconde bande. Donc le diviseur ab est encore à rejetter.

Quant au diviseur bb, je le trouve répété dans le diviseur x^2+b^2 de la seconde bande, et trouvant que le même diviseur x^2+b^2, a x^2 de commun avec le diviseur de la troisième bande, je conclus que x^2+b^2+ax a les conditions requises pour tenter la division. Mais avant de l'entreprendre, je passe aux autres diviseurs de la première bande, et je vois d'abord que $3aa$, et $3ab$ sont à rejetter par la même raison que a^2 et ab; je vois ensuite que $3bb$ étant répété dans le diviseur x^2+3b^2 et x^2 dans $xx+ax$, il s'ensuit que $xx+3bb+ax$ a aussi les conditions requises pour tenter la division. J'essaye alors ces deux divisions, et je trouve que la seconde seule réussit. Le quotient qu'elle donne est $x^3-5ax^2+b^2x-a^3$.

Au lieu de parcourir tous les diviseurs de la première bande, on auroit pu examiner le seul que la dernière bande contient, et trouver bien plutôt que x^2+ax+b^2 et $x^2+ax+3b^2$ étoient les seuls diviseurs à tenter. Car, remarquant alors que le diviseur x^2+ax con-

tient x^2 qui est répété dans x^2+3b^2 et x^2+b^2, et que ces deux derniers contiennent l'un $3b^2$ et l'autre b^2 qui sont chacun dans les diviseurs de la première bande; il étoit facile d'en conclure que x^2+ax+b^2 et $x^2+ax+3b^2$ ont les conditions requises, et qu'ils sont les seuls; puisque, s'il y en avoit d'autres, ou bien ils auroient donné d'autres quantités que $xx+ax$ par la supposition de $b=0$, ou bien d'autres quantités que x^2+3b^2 et x^2+b^2 par la supposition de $a=0$.

XXXVIII.

Autre exemple. Qu'on ait présentement à chercher les diviseurs de la quantité $2x^5+3ax^4+b^2x^3-a^2x^3+4ab^2x^2+6a^2b^2x+2ab^4-2a^3b^2$, soit du premier degré, soit du second, soit à deux lettres, soit à trois.

$2ab^4-2a^3b^2$, $2x^5+b^2x^3$, et $2x^5+3ax^4-a^2x^3$ étant les quantités que donne, dans la proposée, la supposition de x, a, b, égaux à zéro, il faut d'abord ranger vis à-vis de chacune de ces quantités tous les diviseurs qu'elles peuvent avoir, tant du premier degré que du second. Comme la première de ces trois quantités en a un assez grand nombre, on doit, dans la crainte d'en omettre quelqu'un, les chercher

tous avec le même ordre que nous avons suivi pour les diviseurs numériques.

Application de la méthode donnée art. XI pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales.

Ayant écrit (voyez la seconde case de la Table ci-jointe) cette première quantité $2ab4 - 2a^3bb$ à part avec une barre à sa gauche, et à gauche de cette barre l'unité, comme premier diviseur de la quantité, je pose 2 au-dessous de 1, parce que c'est après 1 le diviseur le plus simple que puisse avoir cette quantité, et j'écris à droite de la même barre $ab4 - a^3b^2$. Je divise ensuite cette quantité par a, et j'écris a à gauche de la barre, en mettant en même-temps à droite le quotient $b4 - a^2b^2$; je multiplie alors a par 2, ce qui me donne $2a$ que j'écris à gauche de a comme un nouveau diviseur de la quantité; puis je divise $b4 - a^2b^2$, par b, et j'écris le diviseur b à gauche, et le quotient $b^3 - a^2b$ à droite. Enfin je multiplie b, par 2, par a, par $2a$; et je mets à gauche de b, les produits $2b$ ab, $2ab$, comme de nouveaux diviseurs de la quantité.

La quantité étant réduite à $b^3 - a^2b$, je la divise encore par b que j'écris toujours à gauche, ainsi que le quotient $bb - aa$ à droite; je ne multiplie point ensuite b par 2, ni par a, ni par $2a$, parce que cela donneroit des diviseurs que j'ai déjà eus; mais je le multiplie par

b et par $2b$, ce qui me donne les nouveaux diviseurs du second degré bb et $2bb$; si j'en voulois admettre du troisième, ainsi que cela peut être nécessaire dans d'autres occasions, je multiplierois, outre cela, b par ab et $2ab$.

Après avoir réduit la quantité à $bb - aa$, je vois qu'elle est divisible par $b - a$, et que le quotient est $b + a$; j'écris donc l'un à gauche et l'autre à droite, et je multiplie $b - a$ par 2, par a, par b, par $2a$, et par $2b$, ce qui me donne pour nouveaux diviseurs du premier et du second degré, $2b - 2a$, $ba - aa$, $bb - ab$, $2ab - 2aa$, $2bb - 2ab$. Si j'en avois voulu du troisième et du quatrième degré, j'aurois, outre cela, multiplié $b - a$, par ab, $2ab$, abb, $2abb$. La quantité restante $b + a$ n'ayant plus ensuite d'autre diviseur qu'elle-même, je l'écris à gauche, et je la multiplie par 2, par a, par b, par $2b$, $2a$, $b - a$, $2b - 2a$; ce qui me donne les nouveaux diviseurs du premier et du second degré, $2b + 2a$, $ba + aa$, $2ba + 2a^2$, $b^2 + ab$, $2b^2 + 2ab$, $b^2 - a^2$, $2bb - 2aa$. Si j'en avois voulu admettre des troisième, quatrième et cinquième degrés, c'est-à-dire, tous les diviseurs que la quantité proposée pouvoit avoir, j'aurois multiplié, outre cela, $b+a$ par ab, $2ab$, bb, $2bb$, abb, $2abb$, $ba - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$,

$abb - aab$, $2abb - 2a^2b$, $b^3 - ab^2$, $2b^3 - 2ab^2$, $ab^3 - a^2b^2$, $2ab^3 - 2a^2b^2$.

Cela fait, j'écris (voyez la troisième case de la Table ci-jointe) tous les diviseurs du premier et du second degré a, $2a$, b, $2b$, $b - a$, $2b - 2a$, $b + a$, $2b + 2a$, ab, $2ab$, b^2, $2b^2$, $ab - aa$, $2ba - 2aa$, $bb - ab$, $2bb - 2ab$, $ba + aa$, $2ba + 2aa$, $bb + ba$, $2bb + 2ab$, $b^2 - a^2$, $2b^2 - 2a^2$ à côté de la quantité $2ab^4 - 2a^3b^2$ qui les a donnés. J'écris ensuite à côté de la quantité $2x^5 + b^2x^3$, les diviseurs du premier et du second degré x, x^2, $2x^2 + bb$, et à côté de la quantité $2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$, ses diviseurs du premier et du second degré x, x^2, $2xx + 3ax - aa$.

Parcourant après tous ces diviseurs pour savoir ceux qui peuvent être admis, je remarque bientôt qu'il n'y en a aucun du premier degré. Car ne trouvant que x dans la seconde et la troisième bande qui soit du premier degré, je conclus qu'il doit être le seul diviseur du premier degré, s'il y en peut avoir ; puisque si le diviseur du premier degré renfermoit, ou un terme affecté de a, ou un affecté de b, celui qui auroit été affecté de a, seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de $b = 0$, et que celui qui auroit été affecté de b seroit resté dans les diviseurs donnés par la supposition de

$a = 0$. Mais x n'est point un diviseur de la quantité proposée ; donc il n'y en a point du premier degré. Je viens ensuite aux diviseurs du second degré, et je commence par x^2 que je prends dans la troisième bande, je conclus que, s'il fait partie d'un diviseur, il ne peut lui manquer qu'un terme affecté du produit ab. En effet, s'il y en avoit eu qui fussent affectés de aa, de bb, de ax, ou de bx, ceux qui auroient été affectés de bb ou de bx n'auroient pas disparu par la supposition de $a = 0$, et ceux qui auroient été affectés de aa, ou de ax, ne se seroient pas évanouis par la supposition de $b = 0$. Mais je trouve dans la première bande ab et $2ab$; donc $xx + ab$, $xx + 2ab$, $xx - ab$, $xx - 2ab$, sont des diviseurs à tenter.

Je passe ensuite au diviseur $2x^2 + 3ax - aa$, et je trouve le terme $2x^2$ répété dans le diviseur supérieur $2xx + bb$, je trouve en même temps le terme $-aa$ répété dans plusieurs diviseurs qui sont au-dessus : mais de tous les diviseurs où il est répété, il n'y a que $bb - aa$ qui ait en même temps le terme bb que contient le diviseur $2xx + bb$. Ainsi ce n'est qu'avec $2xx + bb$ et $bb - aa$ que $2x^2 + 3ax - aa$ peut concourir à former un diviseur qui ait les conditions requises, et ce diviseur qui est $2x^2 + 3ax - aa + bb$, est par conséquent à

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 + 4b^2x^3 -$
$- 3a^3b^2$
$x^5 + 4b^2x^3 + 3b^4x$
$x^5 - 4ax^4 - 5a^2x^3 - a^3x^2 - a$

$2ab^4 - 2a$
$ab^4 - a^3$
$b^4 - a^2$
$b^3 - a$
$b^2 - a$
$2ab^5 - 2a^2b^2, ab^3 - a^2b^2, 2b^5 - 2ab^2, b^5 - a$ $b + a$
$\begin{cases} 2ab^5 + 2a^2b^2, ab^5 + a^2b^2, 2b^5 + 2ab^2, b^5 + a \\ 2ab^4 - 2a^3b^2, ab^4 - a^3bb, 2b^4 - 2a^2b^2, b^4 - a \end{cases}$ I

$2x^5 + 3ax^4 + b^2x^3 - a^2x^3 + 4a$

$2ab^4 - 2a^3b^2$ $\begin{cases} a, 2a, b, 2b, b - \\ bb, 2bb, ab, 2ab, b \\ bb + ab, 2ba - \end{cases} b - aa$

$2x^5 + b^2x^3$ $x, xx, 2xx + vx + bb$
$2x^5 + 3ax^4 - a^2x^3$ $x, x^2, 2xx + 3a + 3ax -$
$bb + 3ax$

tenter. Je vois qu'il n'y en a plus d'autres à chercher, parce que s'il pouvoit y en avoir un qui n'eût pas été découvert dans l'examen qu'on vient de faire des diviseurs de la troisième bande, il faudroit que ce fût un seul terme affecté de a^3b: or, on voit tout de suite que la quantité n'a point de diviseur de cette nature.

Je tente alors la division par $2xx + 3ax - aa + bb$, elle réussit, et me donne pour quotient $x^3 + 2abb$ qui m'apprend qu'aucune des quantités $xx + ab$, $xx - ab$, $xx + 2ab$, $xx - 2ab$, ne peut diviser la proposée.

XXXIX.

Si la quantité proposée étoit d'un degré plus élevé que le cinquième, et qu'après s'être assuré qu'elle n'a aucun diviseur, ni du premier, ni du second degré, on voulût chercher ceux du troisième, quatrième, etc. degré qu'elle pourroit avoir, on suivroit pour cela une méthode analogue à celles qu'on vient d'expliquer, et qu'il est est assez facile d'imaginer.

Si la quantité dont on cherche les diviseurs renfermoit plus de trois lettres, la méthode qu'il faudroit suivre pour les trouver, seroit, à très-peu de chose près, la même que lorsqu'il n'y en a que trois; ainsi nous laisserons les Commençans s'y exercer.

XL.

Ce qu'il faut faire pour trouver des diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes.

Lorsqu'on aura une quantité dont tous les termes ne sont pas homogènes, c'est-à-dire, élevés au même degré, on n'aura qu'à commencer par mettre tous ses termes au même degré à l'aide d'une nouvelle lettre, et chercher les diviseurs de cette nouvelle quantité par les règles précédentes. Ces diviseurs trouvés, on en chassera la nouvelle lettre introduite en la supposant égale à l'unité, et l'on aura par ce moyen les diviseurs cherchés. Que j'aie par exemple, la quantité $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$; je multiplie le terme bx^4 par a, afin de le rendre du sixième degré. Par la même raison, je multiplie x^2 par a^4, bx par a^4, et b par a^5; ce qui me donne la quantité $x^6 + bx^5 - abx^4 + a^4xx + a^4bx - a^5b$, laquelle, au moyen des méthodes précédentes, se trouve être le produit de $xx - ab + bx$ par $x^4 + a^4$. Je suppose $a = 1$ dans ces deux produisans, ce qui me donne $xx - b + bx$ et $x^4 + 1$ pour les deux produisans de la quantité proposée $x^6 + bx^5 - bx^4 + x^2 + bx - b$.

XLI.

Il y a des cas où les diviseurs se trouvent

plus facilement qu'en suivant les méthodes précédentes, lorsqu'on a un peu d'habitude dans le calcul. Voici un de ces cas sur lequel il est bon de prévenir les Commençans.

Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes.

Lorsque quelqu'une des lettres de la quantité proposée ne montera qu'au premier degré, il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir qu'un des diviseurs de cette quantité qui contienne cette lettre. Donc il y aura au moins un diviseur qui ne la contiendra pas, et alors, suivant la méthode de l'article XXIX, pour trouver ce diviseur, il faudra chercher le plus grand commun diviseur des termes où cette lettre se trouve, et des autres termes dans lesquels cette lettre ne se trouve pas.

Soit, par exemple, la quantité $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x + cx^3 - acxx - 8a^2cx + 6a^3c - 8a^4$; je cherche le plus grand commun diviseur des deux parties $cx^3 - acxx - 8aacx + 6a^3c$ et $x^4 - 3ax^3 - 8a^2x^2 + 18a^3x - 8a^4$ de cette quantité, l'une contenant la lettre c, l'autre n'en contenant point, je trouve pour ce plus grand diviseur commun $xx + 2ax - 2aa$; c'est en effet le diviseur cherché de la quantité proposée.

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des équations des degrés quelconques, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des équations du second degré; avec différentes opérations relatives aux équations, comme l'élévation des puissances, l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, etc.

APRÈS avoir vu comment on tiroit d'une équation qui passoit le second degré, celles du

premier et du second degrés qu'elle pouvoit renfermer, il faut voir ce qu'on a fait pour résoudre les équations qui échappent à cette méthode.

I.

Des équations du troisième degré à deux termes.

Pour aller du plus simple au plus composé, nous commencerons par les équations qui ne contiennent que deux termes : supposons d'abord qu'elles ne montent qu'au troisième degré, comme $a x^3 = b$.

Pour résoudre ces équations, il est bien aisé d'imaginer de délivrer d'abord x^3 de son coëfficient, et de prendre la racine cube des deux membres. Le caractère qu'on emploie pour exprimer la racine cube, est le même que celui dont on se sert dans la racine quarrée; mais l'on met 3 au-dessus pour le distinguer.

On met un 3 sur le caractère $\surd$ pour exprimer la racine cube.

Ainsi, pour exprimer la valeur de x qu'on tire de l'équation $a x^3 = b$, ou $x^3 = \frac{b}{a}$, on écrit $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$. Si, par exemple, $b = 1000$, et $a = 2$, on a $x = \sqrt[3]{500}$.

II.

Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois.

Il est à observer qu'on n'a pas ici, comme dans les racines quarrées, la liberté de mettre

+ ou — devant le signe radical ; mais qu'au contraire, la racine cube d'une quantité est toujours de même signe que la quantité elle-même, à cause que le cube d'une quantité positive est positif, et que celui d'une quantité négative est négatif.

III.

Cette résolution fournit assez naturellement une réflexion qui paroît contredire celles qu'on a faites précédemment sur les nombres des racines des équations. Car, un cube n'ayant qu'une racine, et cette racine n'ayant qu'un signe, il ne paroît pas qu'une équation telle que $a\,x^3 = b$ donne plus d'une valeur de x ; cependant, suivant ce qu'on a vu ci-dessus, on devroit s'attendre à trouver trois racines dans une équation du troisième degré, de même que deux dans une du second.

Que conclure de cette réflexion ? Abandonnera-t-on ce principe si satisfaisant par sa généralité, et qui suit naturellement de la formation des équations, exposée dans la troisième partie, article II ? Voici le dénouement de cette difficulté, tiré de la formation même.

Qu'on mette l'équation $a\,x^3 = b$ sous cette forme $x^3 - \frac{b}{a} = 0$, qu'on mette aussi sa ra-

cine $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ sous la forme $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = 0$, qu'on divise alors $x^3 - \frac{b}{a}$ par $x - \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, on trouvera une équation du second degré qui contiendra les deux autres racines.

Pour en faire le calcul plus aisément, soit fait $\frac{b}{a} = c^3$, on aura donc, au lieu des équations précédentes, $x^3 - c^3 = 0$, et $x - c = 0$; divisant la première par la seconde, il vient au quotient $xx + cx + cc = 0$, dont les deux racines sont exprimées par $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{-\frac{3}{4}cc}$, et deviendront la seconde et la troisième valeurs cherchées de x dans l'équation $x^3 = \frac{b}{a}$, aussitôt qu'on aura remis à la place de c sa valeur $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

IV.

La substitution faite, les deux valeurs de x se trouveront exprimées par $a - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$. Car on voit que le quarré de

$\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, c'est-à-dire, le produit de $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ par $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ doit être $\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}$; et qu'en général la multiplication des racines cubes, comme celle des racines quarrées, se fait en multipliant d'abord les quantités qui sont sous le signe radical, et en mettant ensuite ce signe devant le produit.

Comment on multiplie les radicaux cubes.

V.

Les trois racines de l'équation proposée $ax^3 = b$, sont donc $x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$ $x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{bb}{aa}}}$; la première réelle, et les deux autres imaginaires, mais cependant toujours telles, qu'on peut dire qu'elles résolvent l'équation proposée.

Racines de l'équation du troisième degré à deux termes.

VI.

Supposons maintenant qu'on ait une équation à deux termes d'un degré quelconque, on la résoudra de la même manière, en employant un radical dont l'exposant soit celui que l'inconnue

Des équations à deux termes et d'un degré quelconque.

connue a dans cette équation. Soit, par exemple, l'équation $a x^m = b$, ou $x^m = \frac{b}{a}$, on en tirera $x = \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$.

Si m est un nombre impair, cette quantité ne pourra être que négative, lorsque $\frac{b}{a}$ sera négatif, et elle ne pourra être que positive, lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Si m est un nombre pair, la racine aura, comme dans le second degré, le signe $\pm$, et elle ne sera réelle que lorsque $\frac{b}{a}$ sera positif. Dans le cas où $\frac{b}{a}$ sera négatif (m toujours pair), les deux racines exprimées par $\pm \sqrt[m]{\frac{b}{a}}$ seront alors toutes les deux imaginaires. Ainsi toutes les équations exprimées généralement par $x^m = \frac{b}{a}$ ne pourront, au plus, avoir que deux racines réelles, les autres racines étant nécessairement imaginaires.

Ces équations ne sauroient jamais avoir plus de deux racines réelles.

Qu'on ait, par exemple, $x^4 = 256$, les deux racines réelles sont $+4$ et -4, les deux imaginaires sont $+\sqrt{-16}$ et $-\sqrt{-16}$. Dans l'é-

quation $x^5 = 243$, la seule racine réelle est $+3$, et les autres, celles qu'on doit trouver en résolvant l'équation $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 27x + 81 = 0$ qui vient par la division de l'équation $x^5 - 243 = 0$ par l'équation $x - 3 = 0$. Sans résoudre cette équation, on doit être assuré que ses racines sont toutes imaginaires, puisque, s'il y en avoit quelqu'une de réelle, elle résoudroit aussi $x^5 = 243$, et par conséquent il y auroit d'autre nombre réel que 3 qui, élevé à la cinquième puissance, donneroit 243.

VII.

Il ne manque présentement à ce que nous venons de dire sur les équations à deux termes, que d'abréger ou de simplifier les expressions radicales qu'elles donnent, lorsqu'il y aura une partie de la quantité dont on pourra prendre exactement la racine, ou même d'éviter entièrement le signe radical, lorsque la quantité entière sera une puissance complette.

Réflexions sur l'élévation des puissances.

Pour reconnoître ces cas, il faut commencer par faire quelques réflexions sur l'inverse de l'opération qu'on se propose alors, c'est-à-dire, sur celle par laquelle des quantités proposées s'élèvent à des puissances quelconques.

Qu'on ait, par exemple, une quantité telle

que $a\,b\,c\,d$ à élever à la puissance m, on voit bien qu'il viendra par cette opération $a^m b^m c^m d^m$.

Qu'il s'agisse d'élever à une puissance quelconque, une quantité comme $\frac{a\,b\,c}{d\,e}$ qui a un diviseur, il est clair qu'il faudra élever ce diviseur, ainsi que le numérateur à cette puissance quelconque, et que s'il y avoit des coëfficiens, il faudroit qu'ils fussent aussi élevés à la même puissance. De plus, si les facteurs ou produisans de la quantité donnée se trouvaient déjà élevés à quelques puissances, ils deviendroient alors élevés à une nouvelle puissance, dont l'exposant seroit le produit de l'exposant qu'ils avoient d'abord, par celui de la puissance à laquelle on les voudroit élever. Ainsi $\frac{2\,a^2 b^3}{3\,c^4}$ élevé à la puissance 3, donnera $\frac{8\,a^6 b^9}{27\,c^{12}}$; $\frac{a^m b^r}{c^n}$ élevé à la puissance q, deviendra $\frac{a^{mq} b^{rq}}{c^{nq}}$. Tout cela est fort simple, et suit entièrement de ce principe, qu'une quantité élevée à une puissance quelconque, n'est autre chose que ce qui résulte de la multiplication de cette quantité par elle-même autant de fois moins une, que l'exposant de la puissance contient d'unités.

VIII.

Application des réflexions précédentes à l'extraction des racines.

On voit bien présentement que l'inverse de cette opération, c'est-à-dire, l'extraction des racines ne demandera autre chose que de diviser les exposans des parties ou facteurs de cette quantité par l'exposant de la racine ; soit que ces parties ou facteurs soient dans le numérateur, soit qu'ils soient aussi dans le dénominateur. Qu'il soit question, par exemple, de prendre la racine cube de $\frac{a^3 b^6}{c^9}$, on divisera par 3 les exposans 3, 6, 9, et on prendra leurs quotiens 1, 2, 3, pour les nouveaux exposans des mêmes lettres. Par ce moyen $\frac{a b^2}{c^3}$ sera la racine cube cherchée.

Si la quantité avoit eu un coëfficient, on en auroit pris la racine cube ; $\frac{8 a^3 b^6}{c^9}$, par exemple, auroit donné $\frac{2 a b^2}{c^3}$ pour sa racine cube.

De la même manière, si on cherche la racine quarrée-quarrée, ou quatrième de $\frac{16 a^4 b^8}{d^4 c^{12}}$, on trouvera $\frac{2 a b^2}{d c^3}$.

IX.

De l'extraction des racines, lorsque les puissances sont incomplettes.

Lorsqu'il n'y aura qu'une partie de la quantité qui se pourra extraire, on l'extraira, et on laissera le reste sous le signe radical, affecté de l'exposant qui lui convient. Soit proposé, par exemple, de prendre la racine cinquième de $\frac{32\,a^{10}\,b^8}{486\,c^7}$ qui est composé du produit de $\frac{32\,a^{10}\,b^5}{243\,c^5}$ par $\frac{b^3}{2\,c^2}$ dont la première est exactement la cinquième puissance de $\frac{2\,a^2\,b}{3\,c}$, et dont la seconde n'a pas de cinquième racine; il faudra écrire alors $\frac{2\,a^2\,b}{3\,c}\sqrt[5]{\frac{b^3}{2\,c^2}}$ pour la racine cherchée.

De même la racine cube de $\frac{8a^3\,b+16a^3c}{54\,d}$ sera $\frac{2}{3}\,a\sqrt[3]{\frac{b+2\,c}{2\,d}}$, parce que la quantité $\frac{8\,a^3\,b+16a^3\,c}{54\,d}$ est le produit de $\frac{8a^3}{27}$ par $\frac{b+2\,c}{2\,d}$, que la première de ces deux quantités est un cube parfait, celui de $\frac{2}{3}\,a$, et que la seconde n'a point de racine cube. De

même $\sqrt[5]{\frac{32a^9 + 128a^6b^3 - 160a^5b^4}{3b^6}}$

$= \frac{2a}{b}\sqrt[5]{\frac{a^4 + 4ab^3 - 5b^4}{3b}}$

X.

Lorsque la quantité, dont il faudra extraire la racine, sera composée, ainsi que les précédentes, de plusieurs termes, et qu'après avoir séparé de tous ses termes les quantités communes qui sont des puissances complettes, on soupçonnera que le reste pourroit être la puissance complette de quelque quantité commensurable composée de plusieurs termes, l'opération qu'il faudra faire pour s'en assurer, sera plus difficile. Afin de trouver la méthode qu'il faut suivre dans cette opération, nous commencerons par faire quelques réflexions sur le problême inverse, c'est-à-dire, sur l'élévation des quantités complexes à des exposans donnés, et nous en tirerons ensuite les principes qu'il faut suivre pour extraire les racines de ces sortes de quantités.

Cherchons d'abord comment la méthode d'élever au cube peut donner celle d'extraire la racine cube; on verra ensuite que les autres puissances n'augmentent la difficulté que par la longueur des calculs.

XI.

Soit prise la quantité complexe la plus simple $u + z$, et soit élevée cette quantité au cube. L'on aura premièrement, pour son quarré, $uu + 2uz + zz$, qui, multiplié par la simple puissance, donne pour le cube demandé, $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3$. On voit donc qu'une quantité quelconque composée de deux parties, lorsqu'on l'élève au cube, donne 1°. le cube de la première partie; 2°. le triple du quarré de cette première partie multiplié par la seconde partie; 3°. le triple de la première partie multiplié par le quarré de la seconde; 4°. le cube de la seconde.

En quoi consiste le cube d'un binome.

XII.

Qu'on ait donc une quantité dont on veuille extraire la racine cube, on commencera par y chercher un terme qui soit un cube, et ce cube représentant u^3, l'on écrira à côté sa racine qui représentera u. On triplera ensuite le quarré de cette racine, et on le fera servir de diviseur à ce qui reste de la quantité donnée, lorsqu'elle aura été diminuée du cube de la racine premièrement posée. Le quotient de cette division sera la seconde partie de la racine, et représen-

Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes.

tera z ; l'ayant écrit à côté du premier terme, on multipliera ensuite ce dernier terme par la quantité qui représente $3uu + 3uz + zz$, c'est-à-dire, par le triple du quarré de la première partie, plus le triple du produit de la première quantité par la seconde, plus le quarré de la seconde. La multiplication faite, on retranchera le produit qu'elle donnera de la quantité proposée, dont le premier cube, qui représente u^3, a déjà été ôté. S'il ne reste rien, on sera sûr que la quantité étoit exactement le cube du binome répondant à $u+z$. S'il reste encore plusieurs termes, et qu'on veuille savoir si elle ne seroit point le cube d'un trinome, pour trouver le troisième terme, on fera des deux termes déjà écrits, le même usage qu'on a fait du premier terme, lorsqu'on a cherché le second.

XIII.

Premier exemple.

Quelques exemples éclairciront cette méthode. Soit la quantité $8y^6 + 60y^4b^2 + 150b^4y^2 + 125b^6$; je commence par prendre la racine cube du premier terme $8y^6$, et j'écris cette racine (voyez la table ci-jointe, case 1) $2y^2$ à côté de la quantité proposée ; je récris ensuite le cube de $2y^2$ sous la quantité proposée, en observant d'en changer le signe,

c'est-à-dire, en lui donnant le signe —. La soustraction ou réduction faite, j'écris le reste $60\,y^4\,b^2 + 150\,b^4\,y^2 + 125\,b^6$, et je mets au-dessous de $2\,y^2$ le triple de son quarré, c'est-à-dire, $12\,y^4$. Je divise alors le premier terme $60\,y^4\,b^2$, par ce triple $12\,y^4$, et j'écris le quotient $5\,b^2$, qui vient de cette division, à côté de $2\,y^2$. J'ajoute ensuite à $12\,y^4$ le produit $30\,b^2\,y^2$ du triple de $2\,y^2$ par la quantité $5\,b^2$, que je viens d'écrire, et j'ajoute à ces deux premiers termes $25\,b^4$, quarré de $5\,b^2$.

Cela fait, je multiplie $5\,b^2$ par ces trois termes, et j'écris leurs produits avec des signes différens, sous la quantité $60\,y^4\,b^2 + 150\,b^4\,y^2 + 125\,b^6$: voyant qu'après la réduction il ne reste rien, je conclus que la quantité proposée étoit un cube parfait, et que sa racine étoit $2\,y^2 + 5\,b^2$.

XIV.

Second exemple.

Que j'aie à présent la quantité $x^6 + 6\,b\,x^5 + 21\,b^2\,x^4 + 44\,b^3\,x^3 + 63\,b^4\,x^2 + 54\,b^5\,x + 27\,b^6$ qu'on voit bien au premier coup d'œil devoir donner plus de deux termes pour sa racine cube. Opérant d'abord comme dans l'exemple précédent, je trouve avec facilité (voyez la table ci-jointe, case 2) les deux premiers

termes $x^2 + 2bx$. Mais comme au lieu de ne rien rester, ainsi qu'il est arrivé dans cet exemple, il vient pour reste $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, je divise le premier terme $9b^2x^4$ de ce qui reste par $3x^4$ triple du quarré de x^2, parce que ce terme $3x^4$ est le premier de ceux que l'on a en triplant le quarré de la quantité $xx + 2bx$, laquelle représente actuellement la première partie (nommée u, art. XI.) de la racine cube cherchée. Ayant fait cette division de $9b^2x^4$ par $3x^4$, j'écris le quotient $3b^2$ à côté de $xx + 2bx$. Je forme ensuite la quantité $3x^4 + 12bx^3 + 21b^2x^2 + 18b^3x + 9b^4$, en ajoutant le triple du produit de $xx + 2bx$ par $3b^2$, et le quarré de $3b^2$. Cela fait, je multiplie cette quantité par $3b^2$, et j'écris tous les termes du produit, en changeant leurs signes, sous la quantité $9b^2x^4 + 36b^3x^3 + 63b^4x^2 + 54b^5x + 27b^6$, et comme il ne reste rien après la réduction, je conclus que $x^2 + 2bx + 3b^2$ est exactement la racine cube de la quantité proposée.

XV.

Nous avons vu (IIeme partie, art. XXIV, XXV et XXVI) comme on faisoit sur les quantités radicales du second degré, les opérations

d'addition, soustraction, multiplication et division. Ces opérations étant également nécessaires pour les quantités radicales des degrés plus élevés, nous allons examiner ce que demandent ces nouveaux radicaux.

Additions et soustractions des quantités radicales de toute espèce.

Quant à l'addition et à la soustraction, elles ne demandent rien de plus que ce qu'on a dit pour les mêmes opérations, en parlant des radicaux du second degré. Il suffit toujours de réduire chaque radical à sa plus simple expression, et de les ajouter ou de les retrancher comme les quantités commensurables.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{b^4 + 2ab^3}$ à ôter de $\sqrt[3]{8a^3b + 16a^4}$, on change la première quantité en $b\sqrt[3]{b + 2a}$, et la seconde en $2a\sqrt[3]{b + 2a}$: or, la soustraction est alors toute simple, et donne $\overline{2a - b}\sqrt[3]{b + 2a}$.

De même, si on ajoute $3a\sqrt[4]{16b^8 + 32b^4a^4}$ avec $4b\sqrt[4]{a^4b^4 + 2a^8}$, on aura . . . . . $10ab\sqrt[4]{b^4 + 2a^4}$.

XVI.

Multiplication et division des quantités radicales qui ont les mêmes exposans.

A l'égard de la multiplication et de la division, si les quantités radicales sont de même exposant, c'est encore la même méthode que dans

les radicaux du second degré ; il suffit de faire l'opération sur les quantités précédées du signe radical, et de mettre le même signe devant le produit, ou devant le quotient, suivant qu'il sera question d'une multiplication ou d'une division.

Exemples.

C'est ainsi que $\sqrt[3]{5ayy} \times \sqrt[3]{7ayz} = \sqrt[3]{35aay^3z}$, ou $y\sqrt[3]{35a^2z}$.

Que $\sqrt[5]{\frac{9a^2b^3}{4}} \times \sqrt[5]{27a^3b^6} = \sqrt[5]{\frac{243a^5b^9}{4}} = 3ab\sqrt[5]{\frac{b^4}{4}}$.

Que $\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}$ divisé par $\sqrt[3]{\frac{a^2-b^2}{8b}}$ donne pour quotient $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^3+8b^5}{a^2-b^2}} = 2b\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

Que $\frac{\sqrt[3]{a^2x^3-x^5}}{\sqrt[3]{ab^4+b^4x}} = \frac{x}{b}\sqrt[3]{\frac{a-x}{b}}$.

XVII.

Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant.

Mais si l'on veut faire ces mêmes opérations sur les quantités radicales de différens signes, et qu'on ne veuille pas se contenter de la simple marque de multiplication, il faut changer ces

antités radicales en d'autres d'un radical plus mposé qui soit le même pour chacune des ux quantités à multiplier ou à diviser.

Qu'on ait, par exemple, $\sqrt[3]{ab}$ et $\sqrt[5]{abb}$ à duire à un même signe, j'élève ab à la puisnce 5, et j'écris $\sqrt[15]{}$, au lieu de $\sqrt[3]{}$, et j'ai la antité $\sqrt[15]{a^5b^5}$ qui est la même chose que $\sqrt[3]{ab}$. élève de même ab^2 à la troisième puissance, et mets $\sqrt[15]{}$ au lieu de $\sqrt[5]{}$; ce qui change la quantité ab^2 en $\sqrt[15]{a^3b^6}$. Ainsi, s'il avoit fallu multiplier ab par $\sqrt[5]{abb}$, il seroit venu pour produit a^8b^{11}; et si j'avois eu à diviser la première r la seconde, j'aurois trouvé pour quotient....

$$\frac{a^5b^5}{a^3b^6} = \sqrt[15]{\frac{a^2}{b}}.$$

Méthode pour cette réduction.

De même le produit de $\sqrt[3]{a^2b^4}$ par $\sqrt{a^4b^5}$ au- it été $\sqrt[6]{a^{16}b^{23}} = a^2b^3\sqrt[6]{a^4b^5}$.

En général, pour réduire deux quantités radiles $\sqrt[m]{a^pb^q}$ et $\sqrt[n]{a^rb^s}$ à un même signe, on angera la première en $\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}}$, et la seconde $\sqrt[mn]{a^{rm}b^{sm}}$. S'il est question alors de les multier, leur produit sera $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}b^{qn+sm}}$; et si vouloit diviser la première par la seconde, quotient seroit $\sqrt[mn]{a^{pn-rm}b^{qn-sm}}$.

Lorsque les deux quantités radicales auront our exposans des nombres qui auront un com-

mun diviseur; on voit qu'il ne sera pas nécessaire de changer chaque radical en un autre, dont l'exposant soit le produit des deux premiers exposans. Que l'on ait, par exemple, $\sqrt{ab}$ et $\sqrt[4]{ab^3}$, on changera le premier en $\sqrt[4]{a^2b^2}$. Qu'on ait de même $\sqrt[4]{a^3b}$ et $\sqrt[6]{a^5b}$, on changera la première en $\sqrt[12]{a^9b^3}$, et la seconde en $\sqrt[12]{a^{10}b^2}$.

XVIII.

Autre manière de faire les opérations précédentes.

On peut trouver une autre méthode pour faire les opérations précédentes, en employant une réflexion sur la nature des quantités radicales, qui suit assez naturellement de ce qu'on a dit, art. VIII, pour extraire toutes sortes de racines. C'est que les quantités radicales peuvent être regardées comme des puissances dont les exposans sont fractionnaires.

Pour faire voir non-seulement comment on est arrivé à cette réflexion, mais encore la manière dont on en a fait usage, cherchons, par le moyen de ce que nous avons vu précédemment, à trouver ce que peuvent être les quantités $\sqrt[m]{a^p b^q}$ et $\sqrt[n]{a^r b^s}$ employées dans l'exemple précédent.

Suivant ce qu'on a dit, art. VIII, si on avoit les nombres qu'expriment les exposans p et q, on les diviseroit par le nombre que m désigne, et

prenant leur quotient pour servir d'exposans à a et à b, on auroit la première quantité exprimée par $\sqrt[m]{a^p b^q}$. Mais sans savoir les valeurs particulières de p, q, m, il est évident qu'on peut, en cette occasion, comme en toutes les autres, écrire généralement $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ pour les quotiens de la division de p et de q par m, c'est-à-dire pour les exposans de a et de b dans la racine m de $a^p b^q$. Donc $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$ est cette racine. De même $\sqrt[n]{a^r b^s}$ sera $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$. Pour multiplier présentement les deux quantités $a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}}$ et $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}$, dans lesquelles sont changées les quantités qu'on avoit à multiplier, article XVIII, il faut, comme dans toutes les multiplications de quantités incomplexes, ajouter les exposans des mêmes lettres, c'est-à-dire, $\frac{p}{m}$ et $\frac{q}{m}$ avec $\frac{r}{n}$ et $\frac{s}{n}$, ce qui donnera

$$a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}} b^{\frac{q}{m}+\frac{s}{n}},$$

ou $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{qn+sm}{mn}}$,

en mettant les fractions $\frac{p}{m}$ et $\frac{r}{n}$ au même dénominateur, aussi bien que $\frac{q}{m}$ et $\frac{s}{n}$.

Ainsi $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{qn+sm}{mn}}$, c'est-à-dire, le produit de a élevé à la puissance $\frac{pn+rm}{mn}$ par b élevé à la puissance..... $\frac{qn+sm}{mn}$ est le produit des quantités proposées.

Il est aisé de voir présentement l'identité de cette expression $a^{\frac{pn+rm}{mn}} b^{\frac{qn+sm}{mn}}$, et de l'expression $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}\, b^{qn+sm}}$ qu'on avoit trouvée dans l'article XVII. Car, par la même raison qu'on vient de voir que $\sqrt[m]{a^p}$ et $a^{\frac{p}{m}}$, ne désignoient que la même quantité, on doit voir que $a^{\frac{pn+rm}{mn}}$

et

et $\sqrt[mn]{a^{pn+rm}}$ sont la même chose, ainsi que $\sqrt[mn]{b^{qn+sm}}$ et $b^{\frac{qn+sm}{mn}}$.

Si on avoit voulu, au contraire, diviser la première quantité $\sqrt[m]{a^p b^q}$ par la seconde $\sqrt[n]{a^r b^s}$, on auroit retranché l'exposant $\frac{r}{n}$ de $\frac{p}{m}$ et l'exposant $\frac{s}{n}$ de $\frac{q}{m}$, et l'on auroit eu $a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}}\, b^{\frac{q}{m}-\frac{s}{n}}$, ou $a^{\frac{pn-rm}{mn}}\, b^{\frac{qn-sm}{mn}}$ pour le quotient.

Afin qu'on se familiarise avec cette transformation de quantités radicales en puissances fractionnaires, il sera bon d'en faire encore quelqu'application. Soit proposé, par exemple, de diviser $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$. On changera d'abord la première quantité en $a^{\frac{m}{2p}}\, b^{\frac{3n}{2p}}\, c^{\frac{1}{p}}$ et la seconde en $a^{\frac{2p}{p}}\, b^{\frac{n}{p}}\, c^{\frac{1}{p}}$, ensuite on retranchera les exposans $\frac{2m}{p}$,

$\frac{n}{p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les lettres a, b, c dans la seconde, des exposans $\frac{m}{2p}$, $\frac{3n}{2p}$, $\frac{1}{p}$, qu'ont les mêmes lettres dans la première, et les restes $-\frac{3m}{2p}$, $\frac{n}{2p}$, 0, seront les exposans à donner aux mêmes lettres dans le quotient, c'est-à-dire, que $a^{-\frac{3m}{2p}} b^{\frac{n}{2p}} c^{0}$ est ce quotient.

Lorsqu'on trouve une pareille quantité, il est naturel qu'on soit un peu embarrassé à savoir ce qu'elle signifie ; car, n'ayant point encore rencontré d'exposant qui soit ou zéro, ou négatif, on ne sait ce que deviennent les quantités dont elles sont les exposans.

Pour le découvrir, soit reprise la question dans l'endroit où commence à paroître la difficulté, c'est-à-dire, lorsqu'on retranche les exposans $\frac{2m}{p}$ de $\frac{m}{2p}$ et $\frac{1}{p}$ de $\frac{1}{p}$ afin de diviser $a^{\frac{m}{2p}}$ par $a^{\frac{2m}{p}}$ et

$c^{\frac{1}{p}}$ par $c^{\frac{1}{p}}$; c'est donc à la place de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ qu'on met c^{o} ; et à la place de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$ qu'on met $a^{-\frac{3m}{2p}}$; mais au lieu de $\frac{a^{\frac{m}{2p}}}{a^{\frac{2m}{p}}}$, on peut mettre $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, à cause que $a^{\frac{2m}{p}}$ est le produit de $a^{\frac{3m}{2p}}$ par $a^{\frac{m}{2p}}$; et au lieu de $\frac{c^{\frac{1}{p}}}{c^{\frac{1}{p}}}$ on peut mettre 1. Donc les deux quantités à examiner $a^{-\frac{3m}{2p}}$ et c^{o} expriment, l'une $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}}$, et l'autre 1. Et partant le quo-

tient cherché de $\sqrt[2p]{a^m b^{3n} c^2}$ divisé par $\sqrt[p]{a^{2m} b^n c}$ est $\frac{1}{a^{\frac{3m}{2p}}} \times b^{\frac{n}{2p}} \times 1$, ou $\frac{b^{\frac{n}{2p}}}{a^{\frac{3m}{2p}}}$.

XIX.

La nouveauté des expressions qu'on vient d'employer dans l'article précédent, et la généralité qu'elles apportent dans l'analyse, méritent qu'on en fasse une courte récapitulation, en les réduisant en principes généraux.

Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire.

1°. *A une quantité quelconque, dont l'exposant sera une fraction, l'on pourra toujours substituer la racine d'une quantité dont l'exposant sera un entier; pourvû que le dénominateur de cette fraction serve d'exposant au signe radical, et que son numérateur soit l'exposant de la quantité qui est sous le signe*, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'en général.....

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Ce que c'est qu'une puissance négative.

2°. *Lorsqu'une quantité a un exposant négatif, on la peut changer en une frac-*

tion, dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est la même quantité avec un exposant égal au proposé, mais avec le signe +, c'est-à-dire, qu'en général. . . . . .

$a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$.

3°. *Toute quantité, dont l'exposant est zéro, se réduit à l'unité*, c'est-à-dire, que $a^{o} = 1$.

La démonstration de ces trois propositions prises dans leur plus grande généralité, ne demande point d'autres argumens que ceux qu'on a employés dans l'article précédent. Cependant, pour se ressouvenir plus aisément de ces propositions, et pour s'en servir avec plus de confiance, il est à propos de les considérer à part; ce qui se fera facilement de la manière suivante. Ce que c'est que la puissance o.

1°. On démontrera que $a^{\frac{n}{m}}$ est la racine m de a^{n}, si on fait voir qu'en élevant $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m, il vient a^{n}. Or, pour élever $a^{\frac{n}{m}}$ à la puissance m, il est évident qu'il faut

multiplier son exposant par m; ce qui donnera $a^{\frac{n}{m} \times m}$, ou a^n.

2°. a^{-m} sera nécessairement égal à $\frac{1}{a^m}$ si, en multipliant ces deux quantités par une même puissance de a, il vient le même produit. Or, qu'on les multiplie l'une et l'autre par une puissance de a plus élevée que m, telle que a^{2m}, par exemple, on aura $a^{2m} \times a^{-m}$, ou a^{2m-m}, ou a^m pour le produit de a^{2m} par a^{-m}; et de même $\frac{a^{2m} \times 1}{a^m}$, ou a^m pour le produit de a^{2m} par $\frac{1}{a^m}$. Donc a^{-m} et $\frac{1}{a^m}$ sont égaux.

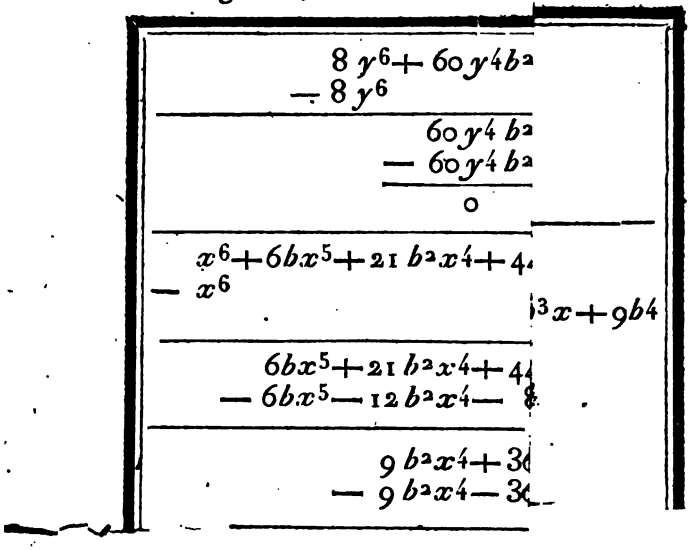
3°. Par la même raison a^0 et 1 sont égaux, puisqu'en multipliant a^0 par a, il vient $a^{0+1} = a^1 = a$, aussi bien qu'en multipliant 1 par a.

Comme ces trois seules propositions suffisent pour toutes les réductions et les transformations de même espèce que les précédentes, et pour une infinité d'autres opérations, les Commençans ne sauroient trop s'exercer à en faire des applications. Afin de leur en faciliter les

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

Page 263, Tome I.



moyens, j'ai joint plusieurs exemples dans la troisième case de la Table ci-jointe.

XX.

Après avoir résolu toutes les difficultés qu'on pouvoit rencontrer dans les équations à deux termes, il est naturel qu'on ait cherché aussi à résoudre généralement toutes celles qui n'ont que trois termes; mais on est bien loin encore d'avoir trouvé une méthode générale pour toutes les équations de cette nature; on s'est contenté de les résoudre dans quelques cas particuliers. Par exemple, on a trouvé une classe d'équations assez étendue, qui pouvoit se réduire facilement aux deux cas que nous avons déjà vus, celui des équations du second degré, et celui des équations à deux termes d'un degré quelconque.

Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré.

Ces équations sont toutes celles qu'on peut mettre sous cette forme générale $x^{2m} + ax^m = b$. Pour les résoudre on ajoutera, ainsi que dans les équations du second degré, ce qui peut faire un quarré du premier membre. On aura donc $x^{2m} + ax^m + \frac{1}{4}aa = b + \frac{1}{4}aa$ dont la racine est $x^m + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$, et par conséquent $x^m = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}$

équation qui n'a que deux termes, et de laquelle on tire $x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}aa}}$.

Par cette formule on résoudra toutes les équations à trois termes, dont le premier sera affecté d'une puissance d'x double de celle qui affecte le second terme, et dont le troisième sera une quantité connue. Il est clair, par cette expression, et par ce qu'on sait déjà sur les racines des équations, que toutes les équations renfermées dans la formule générale $x^{2m} + ax^m = b$ ne peuvent pas avoir plus de quatre racines réelles, et qu'elles n'en auront que deux, lorsque m sera un nombre impair.

XXI.

Exemple de la méthode précédente.

Pour faire quelqu'application de cette méthode, supposons d'abord qu'on ait l'équation $x4 - bbxx = bbcc$. En ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}b4$, quarré de la moitié du coëfficient de xx, on aura $x4 - bbxx + \frac{1}{4}b4 = \frac{1}{4}b4 + bbcc$ dont la racine quarrée est $xx - \frac{1}{2}bb = \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, d'où l'on tire $xx = \frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$, et partant $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}bb \pm b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$.

susceptibles de deux valeurs réelles et de deux imaginaires. Les premières sont. . . . . ,

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, les deux autres $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}bb - b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}}$, nécessairement imaginaires, à cause que . . . $b\sqrt{\frac{1}{4}bb + cc}$ est plus grand que $\frac{1}{2}bb$.

XXII.

Second exemple.

Soit ensuite l'équation $x^6 - 2a^2bx^3 = a^6$, ajoutant des deux côtés a^4bb, il vient $x^6 - 2aabx^3 + a^4bb = a^4bb + a^6$ dont la racine quarrée est. . . . . $x^3 - aab = \pm a^2\sqrt{aa + bb}$, ou $x^3 = aab \pm a^2\sqrt{aa + bb}$ qui donne enfin $x = \sqrt[3]{aab \pm a^2\sqrt{a^2 + b^2}}$ susceptible de deux valeurs réelles ; l'une positive, l'autre négative. Les quatre autres racines de la même équation, qu'on trouveroit facilement en opérant comme dans l'article III, seroient imaginaires.

XXIII.

Troisième exemple.

Soit à présent $x4 - \overline{aa + bb} \times xx$

$= -aabb$, en ajoutant des deux côtés $\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, on aura $x^4 - \overline{aa+bb} \times xx + \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}aab^2 + \frac{1}{4}b^4 = \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}aabb + \frac{1}{4}b^4$, dont le second membre est aussi bien un quarré que le premier. Prenant donc la racine quarrée de part et d'autre, on aura $xx - \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb = \pm\frac{1}{2}aa \mp \frac{1}{2}bb$ qui donne $xx = aa$, et $xx = bb$, c'est-à-dire, $x = \pm a$ et $x = \pm b$ qui sont les quatre racines de l'équation $x^4 - \overline{aa+bb} \times xx = -aabb$. On auroit trouvé également ces racines par les méthodes de la troisième partie, en cherchant les diviseurs commensurables.

XXIV.

Quatrième exemple.

Soit encore l'équation $x^4 - \overline{2gh+4ff} \times xx = -ggbb$, on aura, en ajoutant le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, et en prenant ensuite la racine quarrée, $x^2 - gh - 2ff = \pm 2f\sqrt{gh+ff}$ qui donne

$$x = \pm\sqrt{gh + 2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}}.$$

Or, en réfléchissant un peu sur cette quantité, il n'est pas difficile de reconnoître que ce qui est sous le signe radical est un quarré, celui de $f \pm \sqrt{ff+gh}$. Car le terme $2f\sqrt{gh+ff}$

est le double du produit de f et de $\sqrt{gh+ff}$, et la quantité $gh+2ff$ contient le quarré de f et le quarré $ff+gh$ de la partie radicale.

Ainsi la valeur précédente de x se réduit, en supposant qu'on eût choisi le signe $+$ pour le premier radical, à $f \pm \sqrt{ff+gh}$. En supposant, au contraire, qu'on eût pris le second signe $-$ du même premier radical, elle se seroit réduite à $-f \mp \sqrt{ff+gh}$; ce sont là les quatre racines de l'équation

$$x^4 - 2ghxx - 4ffxx = -gghh.$$

Dans cet exemple, l'habitude du calcul pourroit faire facilement soupçonner que la quantité $gh+2ff \pm 2f\sqrt{gh+ff}$ avoit une racine quarrée ; mais il pourroit y avoir beaucoup de cas où les quantités trouvées de la même manière, seroient également des quarrés, sans qu'on s'en doutât ; il est donc à propos de chercher une méthode générale pour reconnoître les sortes de quantités, et pour trouver leurs racines.

XXV.

Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables, et en partie radicales.

Pour y parvenir, je commence par remarquer que la racine d'une quantité composée de deux parties, dont l'une est commensurable, dont l'autre est un radical du second degré,

doit être elle-même composée de deux parties, et qu'au moins l'une des deux doit être un radical.

Cela posé, je prends $A + B$ pour exprimer, en général, la quantité proposée, A désignant la partie rationelle, et B un radical quelconque du second degré, je prends ensuite $p + q$ pour exprimer la racine cherchée.

Je remarque maintenant que soit que p désigne la quantité radicale, soit qu'on l'ait exprimée par q, ou que p et q soient l'un et l'autre des radicaux, le quarré $p^2 + 2pq + q^2$ ne pourra avoir que le terme $2pq$ de radical. Comparant donc ce quarré avec la quantité donnée, $2pq$ représentera B, et $p^2 + q^2$, A, c'est-à-dire, en termes algébriques, qu'on aura pour déterminer p et q les deux équations $p^2 + q^2 = A$, et $2pq = B$.

On tire de la seconde $p = \frac{B}{2q}$ qui, étant substituée dans la première, donne

$\frac{B^2}{4q^2} + q^2 = A$, ou $q^4 - Aq^2 = -\frac{B^2}{4}$

ou $q^2 - \frac{1}{2}A = \pm\frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}$, et partant $q = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$.

Substituant ensuite cette valeur de q dans l'é-

quation $p^2 + q^2 = A$, ou $p = \pm \sqrt{A - q^2}$,

on a $p = \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$.

Donc la racine cherchée de la quantité $A+B$

est $\pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}}$, ou simplement

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$.

Car il est évident que cette expression revient absolument au même, que l'expression

$\pm \sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$

qu'on auroit en prenant en — le signe de $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Quant aux signes que doivent avoir les deux

parties $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$

et $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$

de la racine cherchée de $A+B$, ils doivent être les mêmes, si le radical B est positif; et contraires, si B est négatif. Car il est aisé de voir qu'en général $p+q$, ou $-p-q$ étant

la racine de $A+B=pp+qq+2pq$; $p-q$, ou $-p+q$ est celle de.....

$$A-B=pp+qq-2pq,$$

XXVI.

La valeur qu'on vient de trouver pour la racine de la quantité $A+B$, pourroit faire craindre qu'il ne restât encore une difficulté pareille à celle qu'on avoit d'abord à résoudre. Car $\sqrt{\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ et $\sqrt{\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}$ semblent au premier coup-d'œil désigner des racines de quantités en partie rationelles, et en partie irrationelles ; et si cela étoit, la question ne seroit pas plus avancée qu'elle n'étoit. Il faut donc, pour que la méthode soit de quelque utilité, que la quantité A^2-B^2 qui se trouve sous le signe radical, soit un quarré commensurable. Or, c'est ce qui ne sauroit manquer d'arriver toutes les fois que $A+B$ sera dans le cas d'avoir une racine. Pour s'en assurer, il suffit de se ressouvenir (article XXV), que $p-q$ est $\sqrt{A-B}$ en même-tems que $p+q$ est $\sqrt{A+B}$; car on en tirera tout de suite que $\sqrt{A-B}\times\sqrt{A+B}$, ou $\sqrt{AA-BB}$ est

$\sqrt{p-q} \times \sqrt{p+q}$, ou $pp-qq$, c'est-à-dire, une quantité commensurable.

XXVII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer présentement l'application de la méthode précédente, soit pris, pour exemple, la quantité $aa+2c\sqrt{aa-cc}$. En la comparant avec $A+B$, on a $a^2 = A$ et $B = 2c\sqrt{aa-cc}$, et par conséquent $\sqrt{A^2-B^2} = aa-2cc$, d'où l'on tire

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} = \sqrt{aa-cc},$$

on trouve de même

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}} = c;$$

c'est-à-dire, que la racine cherchée est $c+\sqrt{aa-cc}$, ou $-c-\sqrt{aa-cc}$.

XXVIII.

Autre exemple.

Si on avoit à prendre la racine quarrée de $16+6\sqrt{7}$, en faisant $A = 16$ et $B = 6\sqrt{7}$, on auroit $\sqrt{AA-BB} = 2$, et partant

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{AA-BB}} = 3$$

et $\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = \sqrt{7}$;
d'où $3 + \sqrt{7}$, ou $-3 - \sqrt{7}$ seroit la racine cherchée.

XXIX.

Qu'on demande maintenant la racine de

$$ap - 2a\sqrt{ap - aa}.$$

Faisant $A = ap$ et $B = -2a\sqrt{ap - aa}$,
on a $\sqrt{AA - BB} = ap - 2aa$
et $\sqrt{\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{AA - BB}} = \sqrt{ap - aa}$,
et de même
$$\sqrt{\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2}} = a$$
c'est-à-dire que la racine cherchée sera
$\sqrt{ap - aa} - a$, ou $a - \sqrt{ap - aa}$.

XXX.

Troisième exemple.

Si la quantité proposée est
$$b^2 - ab + \tfrac{1}{4}a^2 + 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \tfrac{1}{4}a^3b},$$
on aura
$$A = b^2 - ab + \tfrac{1}{4}aa, B = 2\sqrt{ab^3 - 2a^2b^2 + \tfrac{1}{4}a^3b},$$
et
$$\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{b^4 - 6ab^3 + \tfrac{19}{2}a^2b^2 - \tfrac{3}{2}a^3b + \tfrac{1}{16}a^4}$$
$$= bb - 3ab + \tfrac{1}{4}aa,$$

ce qui donnera

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=\sqrt{bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa},$$

et $$\sqrt{\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-B^2}}=\sqrt{ab}$$

d'où la racine cherchée est

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa};$$

ou $$-\sqrt{ab}-\sqrt{bb-2ab+\tfrac{1}{4}aa}.$$

Cet exemple est plus propre que les précédens à faire voir la nécessité d'une méthode particulière, pour prendre la racine des quantités en partie rationelles et en partie irrationelles. Car, dans les cas précédens, la racine cherchée ne contenant qu'un radical, pouvoit être tirée d'une équation du second degré qui auroit été contenue dans l'équation, pour la résolution de laquelle on avoit cherché à prendre cette racine. Au lieu que, dans ce dernier, la valeur de la racine cherchée contenant deux radicaux, il étoit impossible qu'elle vînt d'aucune équation du second degré. En effet, lorsque nous avons eu à prendre (article XXVII) la racine de

$$aa+2c\sqrt{aa-cc},$$

la question étoit la même, que si on avoit dû résoudre l'équation

$$x^4-2aaxx-4aacc+4c^4+a^4=0$$

de laquelle on pouvoit tirer par la IIIeme partie, article XXXVI, les équations

$$x\,x - 2\,c\,x + 2\,c\,c - a\,a = 0,$$

et $x\,x + 2\,c\,x + 2\,c\,c - a\,a = 0.$

Mais la racine quarrée de

$$b^2 - ab + \tfrac{1}{4}a\,a + 2\sqrt{a\,b^3 - 2\,a^2\,b^2 + \tfrac{1}{4}a^3\,b}$$

devoit servir à la résolution de

$$x^4 + 2 \times \overline{a\,b - b\,b - \tfrac{1}{4}a\,a} \times x^2 + \tfrac{19}{2}a^2\,b^2 - 6\,a\,b^3 - \tfrac{3}{2}a^3\,b + b^4 + \tfrac{1}{16}a^4 = 0$$

qui n'est point décomposable en deux équations du second degré.

XXXI.

Après avoir appris à distinguer, parmi les quantités qui sont en partie rationelles, et en partie irrationelles, celles qui sont des quarrés, on a dû chercher à distinguer aussi celles qui sont des cubes ou d'autres puissances plus élevées, puisque cela étoit nécessaire pour avoir complettement tout ce qui regarde les équations comprises sous la forme $x^{2m} + a\,x^m = b$, ou

$$\sqrt[m]{-\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{b + \tfrac{1}{4}a\,a}}.$$

Voyons d'abord ce que l'on pouvoit faire pour le cas où $m = 3$, c'est-à-dire, pour trouver la racine cube d'une quantité quelconque $A + B$,

dans laquelle A est rationel, et B un radical du second degré.

Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables.

Nous remarquerons d'abord que la racine cube d'une quantité de cette nature, ne peut pas renfermer plus d'un radical du second degré ; car on voit bien que le cube d'une quantité, telle que $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, qui contiendroit deux de ces radicaux, ne pourroit pas manquer d'être affecté de ces mêmes radicaux.

Nous remarquerons ensuite que la même racine cube cherchée ne pourra pas contenir d'autre espèce de radicaux, à moins que ce ne soit un radical cube, et qu'il ne soit commun aux deux parties de la racine. Telle seroit, par exemple, la quantité $f\sqrt[3]{m} + \sqrt{g} \times \sqrt[3]{m}$ dont le cube $mf^3 + 3mff\sqrt{g} + 3mfg + mg\sqrt{g}$, ainsi que la quantité proposée $A + B$, a une partie commensurable, et une partie radicale du second degré.

Cela posé, soit pris $p + q$ pour exprimer la racine cherchée, q étant la partie affectée du radical du second degré, soit qu'il se trouve d'ailleurs, ainsi que p, affecté d'un radical cube, soit qu'ils n'en contiennent ni l'un ni l'autre,

Il est évident que le cube $p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$ ne contiendra pas d'autre radical que le radical du second degré qui est dans q, et qu'il

n'y aura que les termes $3ppq$ et q^3 qui soient affectés de ce radical. On comparera donc ces deux termes à la quantité donnée B, et les deux autres à A; ce qui donnera les équations $A = p^3 + 3pq^2$ et $B = 3p^2q + q^3$.

Pour résoudre ces deux équations, il faut d'abord commencer par chasser l'une des deux inconnues p ou q, ce qui se peut faire aisément par les principes établis dans la seconde partie, article XXXIII. Mais on peut abréger le calcul par le secours d'une remarque qui a dû se présenter facilement à des Algébristes un peu exercés, c'est que $AA - BB$ sera toujours le cube de $pp - qq$, lorsque $A + B$ sera le cube de $p + q$. Car il est clair premièrement que si $p + q$ est la racine cube de $p^3 + 3pq^2 + 3p^2q + q^3$ dont la première partie $p^3 + 3pq^2$ est A, et la seconde $3p^2q + q^3$ est B, il faut nécessairement que $p - q$ soit la racine cube de $A - B$ qui est alors $p^3 + 3pq^2 - 3p^2q - q^3$. Or de-là il suit que $pp - qq$, ou $\overline{p-q} \times \overline{p+q}$ est $\sqrt[3]{\overline{A+B}} \times \sqrt[3]{\overline{A-B}}$, c'est-à-dire, $\sqrt[3]{\overline{AA-BB}}$.

Cela posé, on a donc l'équation $\sqrt[3]{\overline{A^2-B^2}} = p^2 - q^2$, ou $n = p^2 - q^2$, dans laquelle n est donnée, et ne peut être qu'une quantité commensurable, ou un simple radical cube.

De l'équation $n = p^2 - q^2$, ou $q^2 = p^2 - n$, et de l'équation $A = p^3 + 3pq^2$, on tire tout de suite $4p^3 - 3pn - A = 0$, équation qu'il faut résoudre pour avoir la première partie p de la racine cube cherchée. Aussitôt qu'elle sera résolue, on aura la seconde partie de cette même racine cube cherchée, en employant l'équation $q = \sqrt{p^2 - n}$.

Quant au signe radical, il sera positif, si le radical de la proposée a le signe +; et de même négatif, si le radical de la proposée a le signe —. Car on voit aisément que la partie radicale du cube de $p + q$, laquelle est $3\overline{pp+qq} \times q$ sera toujours du même signe que q.

Si la racine de la quantité proposée $A + B$ ne doit point avoir de radical cube qui affecte tous ses termes, n, ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2}$ sera une quantité commensurable, et par conséquent l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$ ne contiendra pas de radicaux; et comme p sera alors commensurable, on ne pourra pas manquer de le trouver en cherchant tous les diviseurs de cette équation par la méthode donnée dans la IIIeme, partie, art. XXXII.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux parties affectées d'un radical cube, ce qu'on

aura reconnu, en ne trouvant point un cube parfait pour $A^2 - B^2$, on verra quelle est la quantité par laquelle il faudroit multiplier la quantité proposée, pour en former une nouvelle dont les deux parties étant prises pour A et pour B, donneroient pour $AA - BB$ un cube parfait. Trouvant alors la racine cube de cette nouvelle quantité mise à la place de la proposée, il ne faudroit plus que la diviser par la racine cube du multiplicateur dont on se seroit servi, et l'on auroit la racine cherchée.

Quant à la détermination de ce multiplicateur, il est clair qu'il ne demande autre chose que de trouver la quantité quarrée, par laquelle il faudroit multiplier la quantité qu'on a trouvée d'abord pour $AA - BB$, si on vouloit la rendre un cube parfait. Car il est clair que la racine quarrée de ce multiplicateur de $AA - BB$, seroit le multiplicateur qu'on devroit donner aux quantités proposées A et B.

XXXII.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Pour montrer l'application de cette méthode, supposons qu'on cherche la racine cube de la quantité

$$7a^3 - 3a^2b + \overline{5aa - ab} \times \sqrt{\overline{2aa - ab}}.$$

par la comparaison de cette quantité avec $A+B$, j'ai

$7a^3 - 3a^2b = A$; $\overline{5aa - ab}\sqrt{2aa - ab} = B$

et partant

$A^2 - B^2 = -a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3$,

et n, ou $\sqrt[3]{A^2 - B^2} = -aa + ab$.

Substituant cette valeur de n, ainsi que celle de A dans l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$, j'ai

$4p^3 + 3paa - 3pab - 7a^3 + 3a^2b$

dont il est question de trouver un diviseur d'une dimension. On trouvera facilement par la méthode enseignée dans la IIIeme partie, art. XXXII, que ce diviseur est $p - a$, c'est-à-dire, que la valeur de p est a. Substituant cette valeur de p dans l'équation $q = \sqrt{pp - n}$, il vient $q = \sqrt{2aa - ab}$.

Donc la racine cherchée est $a + \sqrt{2aa - ab}$.

XXXIII.

Soit présentement proposé de prendre la racine cube de $2aac - abc - bbc - \overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$, je commence par faire

$2aac - abc - bbc = A$

et $B = -\overline{2a - b}\sqrt{aacc - bbcc}$,

ce qui me donne $A^2 - B^2 = 2b^4cc - 2ab^3cc$

Autre exemple.

qui n'est point un cube. Pour savoir ce qui peut le rendre cube, je le décompose en ses produisans, et il devient $2 \times cc \times \overline{b-a} \times b^3$; d'où je découvre aisément qu'en le multipliant par $\frac{4 \times \overline{b-a}^2}{cc}$ qui est une quantité quarrée, j'aurai un cube parfait, celui de $2 \times \overline{b-a} \times b$, ou de $2bb-2ab$; et par conséquent que si on multiplie la quantité proposée par $\frac{2b-2a}{c}$ racine du quarré $\frac{4 \times \overline{b-a}^2}{c^2}$, on aura une nouvelle quantité

$$\overline{2aa-ab-bb} \times \overline{2b-2a} \sqrt{\overline{2aa-2ab-2a-b} \times \overline{2b-2a} \sqrt{aa-bb}},$$

dont la première partie représentant A, et la seconde B, donnera pour $\sqrt[3]{\overline{AA-BB}}$, c'est-à-dire, pour n, $2bb-2ab$. Je suppose donc que l'on m'eût en effet donné ces quantités pour A et pour B, et que j'en eusse tiré cette valeur de n ; dans ce cas, l'équation $4p^3 - 3pn - A = 0$ donneroit

$$4p^3 - 3p \times \overline{2bb-2ab+bb+ab-2aa} \times \overline{2b-2a} = 0,$$

à laquelle on trouveroit, par la méthode donnée dans la IIIeme partie, article XXXII, le diviseur $p+a-b$, c'est-à-dire, que la valeur de p seroit

alors $b-a$; la substituant dans $q=\sqrt{pp-n}$, on auroit $q=\sqrt{aa-bb}$;

donc $b-a\pm\sqrt{aa-bb}$ seroit la racine cube de la nouvelle quantité, ou, ce qui revient au même, du produit de la quantité proposée par $\frac{2b-2a}{c}$.

Donc $\frac{b-a\pm\sqrt{aa-bb}\times\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{2b-2a}}$ est la racine cube cherchée de la quantité proposée.

Dans cet exemple, et dans tous ceux où la racine cherchée se trouvera affectée de radicaux cubes, il est clair qu'on ne sauroit, pour se dispenser d'employer la méthode précédente, avoir recours à la méthode de la troisième partie, article XXXVI, c'est-à-dire, qu'on ne pourra trouver aucun diviseur dans l'équation, dont la solution auroit conduit à donner pour valeur d'x la racine cube cherchée. En effet, il est aisé de voir que l'équation $x^6-2x^3\times 2aac-abc-bbc+2b^4cc-2ab^3cc$ qui auroit donné

$x=\sqrt[3]{2aac-abc-bbc-\overline{2a-b}\sqrt{aacc-bbcc}}$,

n'auroit point été décomposable.

Mais dans tous les cas où la racine cherchée

doit être simplement composée d'un terme rationel et d'un irrationel du second degré, on parviendroit toujours à trouver cette racine en décomposant l'équation dont la solution auroit conduit à chercher la racine cube de la quantité proposée. Dans l'article XXXII, par exemple, où il étoit question de réduire l'expression

$$x = \sqrt[3]{7a^3 - 3a^2b \pm 5a\sqrt{aa - ab}\sqrt{2aa - ab}},$$

on auroit pu trouver dans l'équation

$$x^6 + 6a^2b - 14a^3 \times x^3 - a^6 + 3a^5b - 3a^4b^2 + a^3b^3 = 0,$$

d'où seroit venue cette valeur de x, une équation du second degré $xx - 2ax + ab - aa = 0$ qui auroit donné la même valeur de x.

XXXIV.

Si les termes de la quantité, dont on veut prendre la racine cube, ont des diviseurs, on commencera par les mettre tous au même dénominateur, et on divisera ensuite la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XXXV.

Méthode pour trouver les racines cubes des quantités numériques en partie commensurables, etc.

Lorsque la quantité proposée en partie commensurable et en partie incommensurable sera seulement numérique, on pourra trouver sa

racine cube plus aisément que par la méthode précédente.

Car, en supposant d'abord que la racine cherchée ne doive point avoir de radical cube, mais qu'elle soit composée d'un nombre entier et d'une partie radicale simple et entière aussi, on tire de ce que $p - q$ est $\sqrt[3]{A - B}$ lorsque $p + q$ est $\sqrt[3]{A + B}$, ou, ce qui revient au même, de ce que

$$p = \frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2}$$

une manière simple d'avoir la partie commensurable de la racine cherchée. Il ne faut pour cela que calculer en nombres entiers les plus proches les quantités $\sqrt[3]{A - B}$ et $\sqrt[3]{A + B}$, et prendre ensuite la moitié de ces deux nombres pour avoir la valeur exacte de p. Car, en prenant pour

$$\sqrt[3]{A - B} \text{ et pour } \sqrt[3]{A + B}$$

les nombres entiers qui en approchent le plus, l'erreur qu'on peut commettre sur chacune de ces quantités ne sauroit être de $\frac{1}{2}$, et par conséquent il ne peut pas arriver que le nombre entier qui en résulte pour

$$\frac{\sqrt[3]{A - B} + \sqrt[3]{A + B}}{2},$$

c'est-à-dire, pour p, diffère d'une unité de la vraie valeur de p; et comme cette valeur de p doit être un nombre entier, elle sera donc exactement déterminée par ce moyen.

Ayant ainsi la valeur de p, et sachant déjà celle de n, ou de $\sqrt[3]{AA-BB}$, on substituera, comme dans la méthode précédente, les valeurs de p et de n dans $q = \sqrt{pp-n}$, et l'on aura la seconde partie de la racine cube cherchée.

Si la racine cherchée doit avoir ses deux termes affectés d'un même radical cube, ce qu'on aura reconnu en remarquant que $A^2 - B^2$ n'étoit pas un cube parfait; il faudra, en suivant la même méthode que celle qu'on a employée dans les quantités littérales, chercher le nombre par lequel on devroit multiplier $A+B$ afin que $AA-BB$ fût un cube parfait : et ayant trouvé la racine de la nouvelle quantité que devient $A+B$ par cette multiplication, on n'aura qu'à la diviser par la racine cube du nombre dont on s'est servi pour multiplier $A+B$, et le quotient sera la racine cherchée.

XXXVI.

Application de la méthode précédente à un exemple.

Supposons, pour montrer l'application de cette méthode, qu'on cherche la racine cube de $7+5\sqrt{2}$. Ayant fait $A=7$, $B=5\sqrt{2}$, je trouve que n, ou $\sqrt[3]{A^2-B^2}=-1$. Je remarque ensuite que la valeur de $\sqrt[3]{A+B}$, ou de $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ est plus proche de 2 que de 3; ainsi je prends 2 pour l'exprimer; remarquant de même que celle de $\sqrt[3]{A-B}$, ou de $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ est entre 0 et 1, mais plus proche de 0, je prends 0 pour cette quantité, et j'ai, par ce moyen, p, ou

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}=1.$$

Je substitue alors cette valeur de p dans $q=\sqrt{pp-n}$, et j'ai $q=\sqrt{2}$, d'où je conclus que, si la quantité proposée $7+5\sqrt{2}$ a une racine cube, elle est $1+\sqrt{2}$. En effet, cubant $1+\sqrt{2}$, il vient $7+5\sqrt{2}$.

XXXVII.

Autre exemple.

Supposons présentement qu'on eût à prendre

la racine cube de $5+3\sqrt{3}$; on trouveroit alors $AA-BB=-2$: or, -2 n'étant point cube, il faut chercher le nombre par lequel on auroit dû multiplier $5+3\sqrt{3}$ pour que $AA-BB$ eût été cube, ou ce qui revient au même, il faut chercher le nombre le plus simple par le quarré duquel $AA-BB$, c'est-à-dire 2, étant multiplié, on aura un cube. Or on voit tout de suite que 2 est lui-même ce nombre. Supposons donc que l'on se fût proposé de trouver la racine cube de $10+6\sqrt{3}$. On auroit eu alors $n=-2$ et

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2}$$

ou

$$\frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}+\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}}{2}$$

auroit été 1 en nombre entier le plus proche. Je substitue donc ces valeurs de p et de n dans $q=\sqrt{pp-n}$, et j'ai $q=\sqrt{3}$. J'examine maintenant si $p+q$, ou $1+\sqrt{3}$ est la racine cube de $10+6\sqrt{3}$, et je trouve qu'elle l'est en effet. D'où je conclus que $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ est la racine cube cherchée de $5+3\sqrt{3}$.

XXXVIII.

On simplifiera le calcul d'approximation par lequel on détermine p, en remarquant qu'au lieu de Simplification de la méthode précédente.

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2},$$

on peut écrire

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\dfrac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$$

à cause que n, ou

$$\sqrt[3]{AA-BB}=\sqrt[3]{A-B}\times\sqrt[3]{A+B}.$$

Or, cette expression est en effet plus simple que

$$\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2},$$

parce qu'il est plus facile de diviser par $\sqrt[3]{A+B}$, le nombre n qui est supposé déjà trouvé, que de calculer séparément $\sqrt[3]{A-B}$.

XXXIX.

Pour montrer l'usage de cette nouvelle formule, appliquons-la à l'exemple de l'article XXXVI, où A étoit $=7$, et $B=5\sqrt{2}$; après avoir trouvé de même que dans cet article, que $n=-1$, et que $\sqrt[3]{A+B}$ en Application de la nouvelle méthode.

nombre entier le plus proche étoit 2, au lieu de chercher, comme dans le même article, la racine cube approchée de $7 - 5\sqrt{2}$, je divise n, ou -1 par la valeur 2 de $\sqrt[3]{A+B}$, ce qui me donne $-\frac{1}{2}$ que je substitue dans la formule précédente. . . . . .

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{B}}}{2},$$

et j'ai $\frac{2 - \frac{1}{2}}{2}$ ou 1 (prenant le nombre entier le plus proche) pour la valeur de p, ainsi qu'on l'avoit trouvée dans cet article par la formule $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$; le reste s'acheveroit de même.

XL.

Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où A et B sont de signes différens.

Il est à remarquer cependant que cette nouvelle formule pourroit induire en erreur, si A et B n'étoient pas de même signe; car, dans le cas où ces quantités seroient de signes différens, la vraie valeur de $\sqrt[3]{A+B}$ pourroit être si petite auprès de n, que le nombre entier le plus proche qu'on prend à la place de cette valeur donneroit pour. . . . . .

$\sqrt[3]{}$

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2},$$

un nombre qui différeroit du vrai d'une ou de plusieurs unités. Qu'on eût, par exemple, à prendre la racine cube de $45-29\sqrt{2}$; en faisant $A=45$ et $B=-29\sqrt{2}$, on auroit 1 pour le nombre entier le plus proche de $\sqrt[3]{A+B}$; où $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$, et comme $\sqrt[3]{AA-BB}$ seroit alors 7, la valeur de p, ou de.....

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$$

se trouveroit en ce cas de 4, quoiqu'elle ne fût réellement que 3, ainsi qu'on peut le voir par l'expression.....

$$\frac{\sqrt[3]{A+B} + \sqrt[3]{A-B}}{2}$$

de la méthode précédente.

Ce qu'il faut faire en ce cas

Mais pourvû que cette nouvelle méthode d'avoir p, soit d'un usage sûr, toutes les fois que A et B sont de même signe, il importe peu qu'elle soit applicable, lorsque ces quantités sont de signes différens. Car on voit bien que, dans ce cas, on n'a qu'à commencer par supposer A et B tous deux positifs, et en prendre la racine $p+q$. Ensuite faire p du même signe que A, et q du même signe que B.

Il ne s'agit donc plus que de s'assurer si toutes les fois que A et B sont de même signe, ou, ce qui revient au même, si A et B étant tous deux positifs, on peut, sans craindre d'erreur, substituer dans $\frac{\sqrt[3]{A+B} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B}}}{2}$ à la place de $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Pour nous en convaincre, commençons par supposer, ce qui ne peut jamais aller si loin, qu'on se trompât de $\frac{1}{2}$ en prenant pour $\sqrt[3]{A+B}$ le nombre entier le plus proche. Dans ce cas, la quantité qu'on trouveroit au lieu de p seroit $\frac{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2} + \frac{n}{\sqrt[3]{A+B} \pm \frac{1}{2}}}{2}$. Pour faire voir que cette expression ne sauroit donner un nombre qui diffère d'une unité de la vraie valeur de p, mettons dans cette quantité $p+q$ au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$, et $pp-qq$ au lieu de n, elle deviendra $\frac{p+q \pm \frac{1}{2} + \frac{pp-qq}{p+q \pm \frac{1}{2}}}{2}$ de laquelle retranchant p on tire en réduisant..... $\frac{\pm q + \frac{1}{4}}{2p+2q \pm 1}$ pour l'erreur qué peut appor-

ter, dans la détermination de p, le choix qu'on a fait du nombre entier, au lieu de $\sqrt[3]{A+B}$. Or, il est clair que cette quantité ne sauroit jamais égaler $\frac{1}{2}$; car dans la première expression $\frac{q+\frac{1}{4}}{2p+2q+1}$ qu'elle renferme, le numérateur $q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q+1$, est à plus forte raison plus petit que la moitié de $2p+2q+1$: et dans la seconde expression $\frac{-q+\frac{1}{4}}{2p+2q-1}$ qu'elle renferme encore, le numérateur $-q+\frac{1}{4}$ étant plus petit que la moitié de $2q$, est par conséquent plus petit aussi que la moitié de $2q+2p-1$.

Ainsi on ne sauroit se tromper d'une unité en déterminant p par la méthode précédente, et par conséquent toutes les fois qu'une quantité comme $A+B$ (dans laquelle il n'entre que des nombres entiers, soit sous le signe radical, soit devant ce signe) devra avoir une racine cube $p+q$, qui ne contienne aucun nombre fractionnaire, on trouvera cette racine par la méthode précédente.

XLI.

Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur.

Mais si la quantité $A + B$, quoique dégagée de toute fraction, tant sous le signe radical, que hors de ce signe, devoit avoir une racine cube qui contînt des nombres fractionnaires, telle que la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont la racine cube est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, la méthode précédente, aussi bien que celle de l'article XXXV. ne donneroit rien alors, et jetteroit dans l'erreur en faisant croire qu'il n'y auroit point de racine cube à espérer.

Moyen de s'en garantir.

Pour remédier à cet inconvénient, il faut commencer par chercher directement quelles sont toutes les espèces de racines fractionnaires dont les cubes pourroient être des nombres entiers.

Pour les trouver, soient représentées toutes ces racines par $\frac{p}{m} + \frac{q}{n}$; p et m étant supposés des nombres entiers qui n'ont aucun commun diviseur, q la racine d'un nombre entier, qui ne permet aucune réduction avec le nombre n. En élevant cette quantité au cube, on aura $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mn^2}$ pour la partie rationnelle; et

$\frac{3p^2}{nm^2} + \frac{q^2}{n^3} \times q$ pour la partie incommensurable. De plus, par les conditions du problême que nous cherchons à résoudre, tant la première quantité $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mn^2}$ que le coëfficient $\frac{3p^2}{nm^2} + \frac{q^2}{n^3}$ de la seconde doivent être des nombres entiers.

Soit d'abord égalé $\frac{3p^2}{m^2n} + \frac{q^2}{n^3}$ à h, que je suppose exprimer un nombre entier. On aura donc $q^2 = hn^3 - \frac{3p^2n^2}{m^2}$; mais cette quantité doit être un nombre entier par l'hypothèse; donc $\frac{3p^2n^2}{m^2}$ doit être aussi un nombre entier; donc $\frac{3n^2}{m^2}$ doit l'être encore, et partant n doit être un multiple de m.

Cela posé, soit fait $n = ml$, on aura..... $q^2 = hm^3l^3 - 3p^2l^2$, mettant ces valeurs de n et de q^2 dans $\frac{p^3}{m^3} + \frac{3pq^2}{mn^2}$, cette quantité deviendra après les réductions $-\frac{8p^3}{m^3} + 3phl$, qui doit être un nombre entier. Or, p et m

n'ayant aucun commun diviseur, cette quantité ne sauroit être un nombre entier, que m ne soit ou 1, ou 2. Voilà donc m fixé; quant à n, ou à ml, on voit bientôt qu'il doit être égal à m, parce que l'équation $q^2 = hm^3 l^3 - 3p^2 l^2$ donne $\frac{q}{l} = \sqrt{hm^3 l - 3p^2}$ et partant $\frac{q}{ml}$, ou $\frac{q}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{hm^3 l - 3p^2}$, qui apprend que la seconde partie de la racine ne peut pas avoir d'autre dénominateur que la première, et que ce dénominateur, par conséquent ne peut jamais être non plus que 2, ou 1.

Ainsi, lorsqu'on n'aura pas réussi à trouver, par la méthode précédente, la racine d'une quantité $A + B$, dont la partie rationelle, ou commensurable A, et l'irrationelle B seront des nombres entiers, on n'aura qu'à multiplier cette quantité par 8, et chercher par la même méthode la racine cube de la nouvelle quantité qu'on aura par cette multiplication, et si on ne réussit pas, on sera sûr que la quantité proposée n'étoit pas cube; si on réussit, la moitié de la racine cube qu'on aura alors, sera celle qu'on cherchoit.

XLII.

Lorsque le nombre A et le radical B seront fractionnaires, il est clair qu'il faudra, ainsi que dans l'article XXXIV, mettre A et B au même dénominateur, puis diviser la racine cube du numérateur par celle du dénominateur.

XLIII.

Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux.

Si l'on avoit à prendre la racine cube d'une quantité composée de deux radicaux du second degré, soit que cette quantité soit numérique, ou qu'elle soit littérale, il n'y auroit qu'à la multiplier par le cube de l'un des radicaux que contiendroit cette quantité. Le produit étant alors dans le cas des quantités qu'on vient de traiter, on en prendroit la racine cube de la même manière, et on la diviseroit par le radical dont le cube auroit servi de multiplicateur à la proposée.

XLIV.

Comment on prend la racine quatrième des quantités de même espèce que les précédentes.

Lorsqu'on voudra prendre la racine quatrième d'une quantité comme $A+B$, on n'aura d'abord qu'à en chercher la racine quarrée; car si on n'en trouve pas, à plus forte raison n'en trouvera-t-on pas de racine quatrième, ou quarrée-

quarrée. Si on en trouve une, il ne sera plus question que de trouver la racine quarrée de la quantité que la première extraction aura donnée.

XLV.

Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair.

Il en sera de même toutes les fois qu'on aura une racine à prendre, dont l'exposant sera pair, il faudra commencer par la racine quarrée, et le problême sera réduit à prendre une racine d'un exposant qui ne sera que la moitié du premier.

XLVI.

Pour les racines cinquièmes.

Si l'on vouloit la racine cinquième d'une quantité $A+B$ telle que les précédentes, il faudroit suivre une méthode semblable à celle qu'on a suivie pour la racine cube. Au lieu des deux théorêmes, par lesquels on apprenoit que

$$p=\frac{\sqrt[3]{A+B}+\sqrt[3]{A-B}}{2},$$

et que $\sqrt[3]{A^2-B^2}=p^2-q^2$, on auroit ceux-ci

$$p=\frac{\sqrt[5]{A+B}+\sqrt[5]{A-B}}{2}$$

et $\sqrt[5]{A^2-B^2}=p^2-q^2$, dont on feroit le même usage que des précédens.

XLVII.

Il en seroit de même pour les racines plus élevées. Que m soit l'exposant de la racine qu'on se propose de prendre de $A+B$, on aura ces deux théorêmes $p = \frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ et $\sqrt[m]{A^2-B^2} = p^2 - q^2$ qu'on emploiera encore de la même manière que dans les racines cubes.

Pour démontrer ces théorêmes en général, il ne sera question que de faire voir que si $A+B$ est la puissance m de $p+q$, $A-B$ sera celle de $p-q$; car il suivra de-là nécessairement que $\sqrt[m]{A+B} \times \sqrt[m]{A-B}$ sera.... $\overline{p+q} \times \overline{p-q}$, ou $pp - qq$, et que $\frac{\sqrt[m]{A+B} + \sqrt[m]{A-B}}{2}$ sera $\frac{p+q+p-q}{2}$, ou p.

Quant à la démonstration de ce que $A-B$ est la puissance m de $p-q$, lorsque $A+B$ est celle de $p+q$, elle seroit aisée à trouver si on vouloit y arriver par l'induction. Car, en donnant successivement différentes valeurs particulières à m, et reconnoissant la vérité de ce théorême dans chaque cas particulier, on ne

douteroit pas qu'il ne fût généralement vrai. Mais on ne sauroit se contenter d'une pareille manière de démontrer, qu'au cas que l'on ne pût pas trouver une expression générale pour la puissance m de $p+q$, et pour celle de $p-q$; il faut donc chercher cette expression générale, qui est bien propre d'ailleurs à exciter la curiosité de tous les Analystes.

XLVIII.

De la manière d'élever un binome à une puissance quelconque.

Pour parvenir à trouver la valeur générale de $p+q$, ou de $p+q$ multiplié par lui-même autant de fois moins une que l'unité est contenue dans m, commençons par chercher dans ce que nous avons vû précédemment, ce qui peut avoir du rapport avec cette opération. Reprenons dans cette vue ce que nous avons dit dans la IIIème partie, article II, où nous avons formé une équation par le produit de ses racines $x+a$, $x+b$, $x+c$, etc. où nous avons trouvé la loi suivant laquelle devoient être composés tous les termes de ce produit. Il est aisé de voir que tout ce que nous avons dit alors pourra s'appliquer au cas présent, en supposant que toutes les racines sont égales. Or, les réflexions données dans la IIIème par-

tie, article II, sur l'équation dont les racines sont $x + a$, $x + b$, $x + c$, etc. consistoient en ceci.

1°. Que le premier terme de cette équation n'est autre chose que x élevé à une puissance égale au nombre des racines.

2°. Que le second terme contenoit x élevé à une puissance moindre d'une unité, avec un coëfficient égal à la somme des racines.

3°. Que le troisième terme étoit composé de x élevé à une puissance moindre de deux unités, et avec un coëfficient égal à la somme de tous les produits des racines prises deux à deux.

4°. Que le quatrième terme renfermoit x élevé à une puissance moindre de trois unités, avec un coëfficient égal à la somme de tous les produits des racines prises trois à trois, et ainsi des autres termes.

Si on applique donc ces remarques dans le cas présent où toutes ces racines sont égales, et où leur nombre est exprimé généralement par m, on verra

Que le premier terme sera x^m;

Que le second sera x^{m-1} multiplié par ma, puisque toutes les racines sont égales à a, et que leur nombre est m;

Que le troisième terme sera x^{m-2} avec un

coëfficient égal à a^2, pris autant de fois qu'il y aura de produits ab, ac, ad, bc, etc. dans le coëfficient du troisième terme de l'équation donnée par le produit des racines $x + a$, $x + b$, etc. dont le nombre est supposé m, puisque tous les produits ab, ac, ad, bc, etc. doivent tous être égaux chacun à a^2 lorsque b, c, d, etc. sont égaux à a;

Que le quatrième terme sera x^{m-3} avec un coëfficient égal à a^3, pris autant de fois qu'il y aura de produits abc, abd, acd, bcd, etc. dans le coëfficient du quatrième terme de l'équation, dont le nombre des racines $x + a$, $x + b$, $x + c$, etc. est m, et ainsi des autres termes.

La question est donc réduite maintenant à savoir ce qu'un nombre m de lettres peut donner de produits ab, ac, ad, bc, etc. prises deux à deux; de produits abc, abd, acd, bcd, etc. prises trois à trois, de produits $abcd$, $abce$, $abde$, $acde$, $bcde$, etc. prises quatre à quatre, etc. Car, en supposant que ces nombres soient trouvés, et qu'on les exprime par A, B, C, D, etc. on aura $x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5}$ + etc. pour représenter la valeur cherchée de $x + a$.

$$\overline{\qquad\qquad}^{m}$$

Pour trouver, premièrement, ce qu'un nombre m de lettres a, b, c, d, etc. peut donner de produits de deux lettres ab, ac, ad, bc, etc. en les combinant de toutes les manières possibles; commençons par remarquer que, lorsqu'on aura formé tous ces produits, on aura écrit deux fois plus de lettres que de termes.

Remarquons ensuite que chacune des lettres a, b, c, etc. doit être répétée le même nombre de fois, et que chacune ne pouvant être multipliée que par toutes les autres, et non par elle-même, ne sauroit être répétée que $m - 1$ de fois: donc le nombre de lettres à écrire, en formant tous ces produits, doit être $m \times m - 1$; donc le nombre de tous ces produits doit être $\frac{m \times m - 1}{2}$; et c'est-là la valeur de A, ou du coëfficient du troisième terme de la formule cherchée.

Quant au coëfficient du quatrième terme, c'est-à-dire, au nombre de produits à trois lettres abc, abd, acd, bcd, etc. que peuvent donner un nombre m de lettres, a, b, c, d, etc. prises de toutes les manières possibles trois à trois, pour le trouver, nous remarquerons d'abord que ce nombre doit être le tiers

de celui des lettres qu'on écrit en formant tous ces produits.

Nous remarquerons ensuite que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, et que ce nombre doit être celui qui exprime combien de produits de deux lettres doivent donner toutes les autres lettres ; car il est évident que chaque lettre, a, par exemple, doit être jointe à tous les produits bc, bd, cd, etc. des autres lettres prises deux à deux.

Le nombre de fois que chacune des lettres a, b, c, d, etc. doit être répétée, est donc celui qu'un nombre $m - 1$ de lettres b, c, d, etc. donne de produits de deux lettres. Mais on vient de voir que, lorsque le nombre des lettres étoit m, le nombre de leurs produits deux à deux étoit la moitié du nombre m, multipliée par le nombre $m - 1$, qui est moindre d'une unité. Donc, lorsque le nombre des lettres est $m - 1$, il faut prendre la moitié $\frac{m-1}{2}$ de ce nombre, et la multiplier par $m - 2$, qui est moindre d'une unité que $m - 1$, c'est-à-dire, que $\frac{m-1 \times m-2}{2}$ est le nombre de fois que chacune des lettres a, b, c, etc.

sera répétée dans tous les produits en question; et comme le nombre de ces lettres est m, $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2}$ sera par conséquent le nombre de toutes les lettres écrites. Donc le nombre cherché des produits à trois lettres abc, abd, etc. sera $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$; et c'est-là la valeur de B, ou du coëfficient du quatrième terme.

A l'égard du coëfficient C du cinquième, c'est-à-dire, du nombre de produits de quatre lettres que doit donner le nombre m de lettres, on trouvera de même qu'il doit être

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4}$$

parce que ce nombre doit être le quart de toutes les lettres écrites dans ces produits; que chacune de ces lettres doit être répétée le même nombre de fois, et combinée avec tous les produits de trois lettres que donne le nombre $m-1$ de lettres; et qu'enfin ces produits de trois lettres donnés par le nombre $m-1$ de lettres, doit être $\frac{\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3}$, par la même

raison que $\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$ est celui des produits de trois lettres que fournit le nombre m de lettres.

Formant de même tous les autres coëfficiens, et substituant ensuite dans la formule précédente à la place de A, B, C, D, E, etc. leurs valeurs ainsi trouvées, on aura enfin $x^m + m\,a\,x^{m-1}$

$$+ m \times \frac{\overline{m-1}}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3}$$

$$a^3 x^{m-3} + \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} a^4 x^{m-4}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} a^5 x^{m-5},$$

etc. pour la puissance m de $x + a$.

Formule générale pour l'élévation de $p+q$ à la puissance m.

Par la même raison, la valeur de $\overline{p+q}^m$ dont on avoit besoin article XLVII, sera.....

$$p^m + m\,q\,p^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2}$$

$$+ \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} + \text{etc.}$$

XLIX.

Quant à celle de $\overline{p-q}^m$, il est évident que pour la trouver, il suffira de faire q négatif dans

dans cette formule; ce qui la changera en

$$p^m - mqp^{m-1} + \frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} - \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3} +, \text{ etc.}$$

L.

Si on veut présentement démontrer le théorême de l'article XLVII, on commencera par remarquer que A est la somme de tous les termes

Démonstration du théorême de l'article XLVII.

$$p^m, \frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2}, \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4}, \text{ etc.}$$

dans lesquels il n'entre aucune puissance impaire de q, et que B est la somme de tous les termes. . . . . .

$$mqp^{m-1}, \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{2 \times 3} q^3 p^{m-3}, \frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}}{2 \times 3 \times 4 \times 5} q^5 p^{m-5},$$

où q ne se trouve jamais qu'à une puissance impaire.

On verra ensuite que $A + B$ est la première formule, et $A - B$ la seconde, ce qui étoit le point où la difficulté étoit réduite, article XLVII.

LI.

Application de la formule précédente à un exemple.

Lorsqu'on voudra employer la formule précédente pour élever un binome quelconque à une puissance donnée, rien ne sera plus facile; on n'aura qu'à substituer dans la valeur précédente de $\overline{p+q}^{m}$ à la place de p le premier terme du binome donné, à la place de q le seçond, et à la place de m l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever le binome proposé. Qu'on propose, par exemple, d'élever $3ac-2bd$ à la cinquième puissance; je fais

$$3ac=p,\ -2bd=q,\ 5=m,$$

et j'ai d'abord $p^m=\overline{3ac}^{5}=243\,a^5c^5$.

$$mqp^{m-1}=5\times\overline{-2bd}\times\overline{3ac}^{4}=-810\,a^4bc^4d.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}}{2}q^2p^{m-2}=10\times4\,bbdd\times3ac$$

$$=1080\,a^3bbc^3dd.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}}{2\times3}q^3p^{m-3}=10\times\overline{-2bd}$$

$$\times\overline{3ac}^{2}=-720\,a^2b^3c^2d^3.$$

$$\frac{m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}}{2\times3\times4}q^4p^{m-4}=5\times$$

$$-2bd^{4}\times3ac=240\,ab^4cd^4.$$

$$\frac{m\times m-1\times m-2\times m-3\times m-4}{2\times 3\times 4\times 5}\,q^5 p^{m-5} =$$

$$1\times -2bd\times 3ac = -32\,b^5 d^5.$$

A l'égard des autres termes, leurs coefficiens ayant tous pour un de leurs produisans $m-5$, qui est zéro par la supposition que $m=5$, ils doivent tous être nuls ; ainsi $3\overline{ac-2bd}^5$ aura pour valeur

$$243\,a^5c^5 - 810\,a^4bc^4d + 1080\,a^3b^2c^3d^2 - 720\,a^2b^3c^2d^3 + 240\,ab^4cd^4 - 32\,b^5d^5.$$

LII.

Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes.

Lorsqu'on voudra élever à une puissance donnée une quantité composée de plus de deux termes, on le pourra encore facilement par la même méthode. Qu'il s'agisse, par exemple, d'un trinome, en nommant p le premier terme de ce trinome, q la somme des deux autres, la difficulté de l'élévation du trinome sera réduite à celle du binome, puisque chacun des termes $mp^{m-1}q$, $\frac{m\times m-1}{2}p^{m-2}q^2$, etc. ne renfermera pas de quantité à élever plus composée que des binomes.

Et lorsqu'on aura un polynome plus composé,

on réduira toujours la difficulté à l'élévation d'un polynome plus simple.

LIII.

Exemple. Pour donner un exemple de la manière dont on emploie la formule précédente à l'élévation d'une quantité qui a plus de deux termes, soit proposé d'élever $a + 2b - c$ à la quatrième puissance. On fera $m = 4$, $p = a$, $q = 2b - c$; et substituant ces valeurs dans la formule, on aura . . . . . .

$$p^m = a^4, mqp^{m-1} = 4 \times \overline{2b - c} \times a^3 = 8a^3b - 4a^3c,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1}}{2} q^2 p^{m-2} = 6 \times \overline{2b - c}^2 \times a^2 =$$

$$24a^2b^2 - 24a^2bc + 6a^2c^2,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2}}{1 \times 2 \times 3} q^3 p^{m-3} = 4 \times \overline{2b - c}^3 \times a$$

$$= 32ab^3 - 48abbc + 24abcc - 4ac^3,$$

$$\frac{m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3}}{2 \times 3 \times 4} q^4 p^{m-4} = \overline{2b - c}^4$$

$$= 16b^4 - 4 \times \overline{2b}^3 \times c + \frac{4 \times 3}{2} \times \overline{2b}^2 \times c^2$$

$$- \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 3} \times 2b \times c^3 + \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} c^4$$

$$= 16b^4 - 32b^3c + 24bbcc - 8bc^3 + c^4,$$

et partant $\overline{a+2b-c}^{4} = a4+8a^3b-4a^3c+24a^2b^2-24a^2bc+6a^2c^2+32ab^3-48abbc+24abcc-4ac^3+16b4-32b^3c+24bbcc-8bc^3+c4.$

LIV.

Après avoir trouvé la formule précédente, on ne pouvoit guères tarder à soupçonner qu'elle devoit s'étendre à d'autres puissances que celles qui sont des nombres entiers et positifs. Il suffisoit d'avoir reconnu qu'il y avoit d'autres puissances que celles-là pour vouloir y appliquer cette formule. Ayant reconnu, par exemple, qu'au lieu de $\sqrt[n]{a}$, on pouvoit écrire $a^{\frac{1}{n}}$; on aura imaginé aussitôt que lorsqu'il étoit question de prendre la racine d'une quantité complexe quelconque représentée par $p+q$, on n'avoit qu'à faire $m=\frac{1}{n}$ dans la formule précédente, ou, ce qui revient au même, on aura pensé que . . . . . .

$$p^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}p^{\frac{1}{n}-1}q+\frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}-1}{2}p^{\frac{1}{n}-2}q^2+$$

etc. devoit exprimer $\overline{p+q}^{\frac{1}{n}}$, ou la racine n de $p+q$.

De même on aura soupçonné qu'au lieu de $\frac{1}{\overline{p+q}^{n}}$, ou de $\overline{p+q}^{-n}$, on n'avoit qu'à faire $m=-n$ dans la même valeur de $\overline{p+q}^{m}$, ce qui donnoit . . . . . .

$$p^{-n} - np^{-n-1}q + \frac{n\times -n-1}{2}p^{-n-2}q^{2} - \text{,etc.}$$

En un mot, l'ordre et la généralité qu'on avoit toujours trouvés dans les opérations analytiques, devoient faire penser que, quoique la formule précédente n'eût été d'abord trouvée qu'en supposant m entier et positif, elle pouvoit aussi s'appliquer à toute autre valeur de m. Mais, si la vraisemblance de cette généralité devoit frapper tous les géomètres, elle ne pouvoit pas seule les contenter. L'effet principal qu'elle devoit produire sur leur esprit, étoit de les engager à chercher une démonstration rigoureuse. Voici une manière de trouver cette démonstration, qu'il n'étoit pas bien difficile d'imaginer.

Où l'on fait voir que la formule précédente a lieu encore, lorsque l'exposant est fractionnaire.

Soit proposé premièrement, de faire voir que la formule en question peut s'appliquer toutes les fois que m est une fraction quelconque positive ; ou, ce qui revient au même, soit proposé de prouver l'équation A (voyez la Table 1 ci-jointe), laquelle devient l'é-

quation B, en divisant les deux membres par $p^{\frac{r}{n}}$ et en faisant $\frac{q}{p} = z$.

Mais pour prouver l'équation B, il suffit de faire voir qu'en élevant ses deux membres à la même puissance n, il viendra des quantités égales, c'est-à-dire, (en faisant . . . . . .

$$s = \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2} \times z^2$$

$$+ \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1} \times \overline{\frac{r}{n} - 2}}{2 \times 3} \times z^3 + \text{, etc.})$$

qu'il s'agit de prouver l'équation D.

Or, comme r et n sont deux nombres entiers, on peut faire les élévations indiquées dans cette équation, par le moyen de la valeur générale de $\overline{p + q}^{m}$; ce qui donnera l'équation E.

Le problême étant réduit à prouver l'équation E, il faut trouver par la valeur de s, celles de s^2, s^3, $s4$, etc. multiplier ensuite la valeur de s par z, celle de s^2 par $\frac{n \times \overline{n-1}}{2}$, celle de s^3 par $\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}{2 \times 3}$, celle de $s4$ par . . . . . .

$$\frac{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}{2 \times 3 \times 4}, \text{ etc.}$$

afin d'avoir des valeurs de tous les termes du second membre de l'équation E. Ces valeurs trouvées et écrites les unes sous les autres, on formera l'équation F, laquelle, en faisant les réductions que demande le second membre, devient l'équation G, qui est la même que l'équation E. Donc l'équation A, qui avoit donné cette équation, est prouvée. Donc il est vrai en général que la formule de l'article XLVIII s'applique aussi bien aux puissances fractionnaires quelconques positives, qu'aux puissances entières positives.

L V.

La même formule va encore aux puissances négatives.

Pour faire voir présentement que la même formule s'applique également aux puissances négatives, soit entières, soit fractionnaires, il s'agit de prouver (voyez la table 2 ci-jointe) l'équation A, dont le second membre est celui que donne la formule de l'article XLVIII, en faisant $m = -\frac{r}{n}$.

Il est évident qu'au lieu de prouver l'équation A, on peut se contenter de prouver l'équation B, qui revient au même que la pre-

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY

ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

$$A\overline{p+q}^{\frac{r}{n}} = p^{\frac{r}{n}} + \frac{r}{n} \frac{-1 \times \frac{r}{n} - 2}{\times 3} p^{\frac{r}{}}$$

$$B\overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2}$$

$$C\overline{1+z}^{r} = 1 + \frac{r}{n} z + \frac{\frac{r}{n} \times \overline{\frac{r}{n} - 1}}{2}$$

$$s = z^3 + \frac{\frac{r}{n} \times \frac{r}{n}}{}$$

$$D\overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n}$$

$$r \times \overline{r-1}^{2} \times \overline{r-3}$$

n faisant $z = \frac{q}{p}$, et multipliant les

mbres par $p^{\frac{r}{n}}$.

évident, de plus, qu'au lieu de la

$\frac{}{1+z^{-\frac{r}{n}}}$, on peut écrire, ...

$\frac{}{z^{-\frac{r}{n}}}$, et par conséquent l'équation *B*

l'équation *C*. Mais comme dans le pre-
mbre de cette équation, on peut subs-

$\frac{}{1+z^{\frac{r}{n}}}$ sa valeur tirée de la formule
cle LIV, il est clair qu'il suffit de
l'équation *D*. Or, pour prouver cette
, il suffit de multiplier le second
par le dénominateur du premier, et
urer que le produit qui en vient est
numérateur du premier membre. C'est
rrive en effet; car, faisant la multi-
, il vient pour produit la quantité *E*,
premier terme, qui est l'unité, est le
reste après la réduction. Ainsi on est
résentement, par une démonstration

que la formule de l'article XLVIII a toute la généralité qu'on ne faisoit d'abord que lui soupçonner.

LVI.

Quelqu'assuré qu'on soit d'une vérité par une démonstration générale, on ne sauroit guères se défendre de chercher à la voir confirmée dans quelque application particulière. Sachant, par exemple, que la formule précédente donne l'élévation des quantités quelconques à des puissances fractionnaires, il est naturel qu'on veuille l'appliquer à quelque quantité qu'on sache avoir exactement une racine ou puissance fractionnaire.

Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élévation des puissances.

Soit, par exemple, la quantité $1 + 2b + b^2$, dont on cherche la puissance $\frac{1}{2}$, ou, ce qui revient au même, la racine quarrée. Ayant fait $p = 1$, $q = 2b + b^2$, et $m = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on trouvera . . . . . .

Le premier terme . . . . . $p^m = 1$.

Le second . . . . . $mp^{m-1}q = b + \frac{1}{2}b^2$.

Le troisième. . . . . .

$$\frac{m \times m - 1}{2} p^{m-2} q^2 = -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^3 - \frac{1}{8}b^4.$$

RE
LIBRARY
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS

$$A\overline{p+q}^{-\frac{r}{n}} = p^{-\frac{r}{n}} - \frac{r}{n}p^{-\frac{r}{n}-1}q + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}$$

$$B\overline{1+z}^{-\frac{r}{n}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{r}{n}$$ etc

$$C\frac{1}{\overline{1+z}^{\frac{r}{n}}} = 1 - \frac{r}{n}z + \frac{\frac{r}{n}\times\overline{\frac{r}{n}+1}}{2}z^2 - \frac{r}{n}$$ etc

$$D\qquad\qquad 1$$

rième. . . . . .

$$\frac{-1\times m-2}{2\times 3}\,p^{m-3}q^3=\tfrac{1}{2}b^3+\tfrac{3}{4}b^4+\tfrac{3}{8}b^5+\tfrac{1}{16}b^6.$$

uième. . . . . .

$$\frac{-1\times m-2\times m-3}{2\times 3\times 4}\,p^{m-4}q^4=-\tfrac{5}{8}b^4-\tfrac{5}{4}b^5-\tfrac{15}{16}b^6-\tfrac{5}{16}b^7-\tfrac{5}{128}b^8.$$

xième, etc. et c'est la somme de tous nes qui doit être la racine cherchée.

nspection de cette quantité, on a de la croire qu'elle puisse se réduire à $1+b$ ait être la racine cherchée. Mais la géné- la démonstration précédente, et une expérience du calcul, assurent bientôt réduction.

outant tous ces termes, on remarque que ier terme 1 reste tout entier; que le se- $+\frac{1}{2}b^2$ se réduit à b, parce que la partie e second terme est détruite par la même contenue négativement dans le troi- erme $-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}b^3-\frac{1}{8}b^4$, que ce qui troisième terme, après la destruc- $\frac{1}{2}b^2$, est entièrement détruit aussi quatrième $\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{4}b^4+\frac{3}{8}b^5+\frac{1}{16}b^6$. ne reste plus alors que $\frac{5}{8}b^4+\frac{3}{8}b^5+\frac{1}{16}b^6$.

Ce reste du quatrième terme se trouve détruit de même par le cinquième terme ; et en poussant les réductions plus loin, on voit que tout s'évanouit dans la quantité précédente, excepté $1 \pm b$, ainsi que cela devoit arriver.

LVII.

Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente.

Outre que cet exemple et tous ceux de même nature, qu'il est aisé de former, confirment, pour ainsi dire, par expérience, la proposition démontrée, article LI, ils montrent en même tems une utilité réelle de cette proposition ; puisqu'il en résulte une méthode pour extraire les racines de toutes les quantités qui sont des puissances complettes. Mais ce n'est pas là le seul avantage qu'on en puisse retirer. Lorsque la quantité proposée n'aura point de racine exacte, on en pourra trouver une approchée par la formule précédente.

Exemple.

Qu'on cherche, par exemple, la racine 5eme de la quantité $a + b$. En substituant la plus grande des deux parties de cette quantité qu'on suppose être a à la place de p, la plus petite b à la place de q, et $\frac{1}{5}$ à la place de m, on aura pour la racine cherchée. . . . . , ...

$$a^{\frac{8}{5}} + \tfrac{1}{5}a^{-\frac{4}{5}}b - \frac{1\times 4}{2\times 25}a^{-\frac{9}{5}}b^2$$
$$\frac{1\times 4\times 9}{2\times 3\times 125}a^{-\frac{14}{5}}b^3 - \frac{1\times 4\times 9\times 14}{2\times 3\times 4\times 625}a^{-\frac{19}{5}}b^4$$
$$+\frac{1\times 4\times 9\times 14\times 19}{2\times 3\times 4\times 5\times 3125}a^{-\frac{24}{5}}b^5 - \text{etc.}$$

$$a^{\frac{1}{5}}\times 1 + \frac{b}{5a} - \frac{2bb}{25aa} + \frac{6b^3}{125a^3} - \frac{21b^4}{625a^4}$$
$$\text{etc.}$$

Ce que c'est qu'une série ou suite infinie.

Or, quoiqu'il fallût former de la même ma- ère une infinité de termes, pour que la quan- é précédente, qui est de celles qu'on appelle ites ou séries infinies, exprimât exactement racine cherchée, il est certain néanmoins 'en se contentant de prendre un grand nom- e de ces termes, on approche extrêmement la valeur de la racine cherchée. S'il arrive ême que a soit considérablement plus grand ie b, on n'a besoin que de peu de termes ur approcher sensiblement de la vraie ra- ne.

Qu'on suppose, par exemple, $b = \frac{1}{10}a$, on ra pour les six premiers termes de la suite écédente

$$^{\frac{1}{5}}\times 1 + \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{1250} + \tfrac{3}{62500} - \tfrac{21}{6250000} + \tfrac{399}{1562500000}.$$

Or, si l'on fait attention à la considérable
minution successive de ces six termes, on v
que ceux qu'on pourroit y joindre, seroient
petits, qu'ils ne valent pas la peine d'ê
cherchés.

LVIII.

Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente.

L'utilité de la formule des puissances ne
borne pas encore à trouver par approximati
toutes sortes de puissances fractionnaires
négatives ; elle est infiniment plus étendue,
servant à réduire en séries toutes sortes de qu
tités où il entre tant de signes radicaux, di
seurs, etc. qu'on voudra. Qu'on ait, par exe
ple, la quantité $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}}{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}}$, en
duisant d'abord les deux quantités $\sqrt[3]{a+}$
et $\sqrt[3]{a-b}$ en séries, et les ajoutant, p
en élevant la série qui en est la somme à
puissance $\frac{1}{4}$, on formera une nouvelle série,
étant multipliée ensuite par celle qu'on tr
veroit de même pour $\frac{1}{\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-}}$
ou $\sqrt[5]{a+b}-\sqrt[5]{a-b}$ donneroit enfin u
seule série pour exprimer la quantité pro

Or, indépendamment de l'avantage d'avoir approximation toutes les quantités com- es de radicaux et de diviseurs complexes, ı une infinité de cas où il est très-utile pour démonstrations, que les quantités à traiter nt délivrées de radicaux et de diviseurs com- es, ainsi qu'elles le sont par leurs trans- ıations en séries. Mais il est tems de retour à la résolution des équations.

ÉLÉMENS D'ALGÉBRE.

CINQUIÈME PARTIE.

Résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

LORSQU'ON a voulu passer des équations exprimées généralement par $a\,x^m = b$ et $a\,x^{2m} + b\,x^m = c$, à celles qui contenoient, outre ces racines, les intermédiaires, on a bientôt senti des difficultés qui ont fait abandonner l'espérance de résoudre ces équations en général. On n'a pu parvenir jusqu'à présent qu'à la solution de celles du troisième et du quatrième degré ; encore la méthode qu'on a trouvé

trouvée pour les résoudre, souffre-t-elle une exception considérable : voici le chemin qu'on a dû suivre en découvrant cette méthode.

I.

Soient représentées par l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$, toutes celles du troisième degré. Si on pouvoit réduire cette équation à une autre qui n'eût que le premier et que le dernier termes, il est évident que ce seroit l'avoir résolue. Or le moyen le plus naturel de transformer une équation en une autre, dans laquelle on soit libre de faire quelque changement, c'est de substituer dans cette équation, à la place de l'inconnue, quelque quantité, dans laquelle on laisse une lettre indéterminée, afin de pouvoir s'en servir à volonté.

Equation du troisième degré la plus composée.

II.

Soit donc substitué dans cette équation $x + r$ au lieu de y, il viendra $x^3 + \overline{3r + d} \times xx + \overline{3rr + 2dr + e} \times x + r^3 + dr^2 + er + f = 0$, que l'on écrit aussi de cette manière :

$$\begin{array}{rrrr} x^3 & + 3r\,x^2 & + 3rr\,x & + r^3 = 0 \\ & + d & + 2dr & + dr^2 \\ & & + e & + er \\ & & & + f \end{array}$$

Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette équation.

Comme on est le maître de r dans cette équation, il est aisé de voir qu'on peut par son moyen faire évanouir celui des termes qu'on voudra, mais aussi on n'en sauroit faire disparoître qu'un à la fois.

Qu'on fasse, par exemple, $3r+d=0$, ou $r=-\frac{1}{3}d$, le second terme s'évanouira, et l'équation deviendra . . . . . .

$$x^3+ex+\tfrac{2}{27}d^3=0$$
$$-\frac{d^2}{3}-\frac{de}{3}$$
$$+f$$

Si on fait au contraire $3rr+2dr+e=0$, ou $r=-\frac{1}{3}d\pm\sqrt{-\frac{e}{3}+\frac{1}{9}dd}$, le troisième terme s'évanouira, mais les deux autres resteront.

Si on vouloit faire évanouir le dernier terme, il faudroit faire $r^3+dr^2+er+f=0$; et alors pour avoir r, il faudroit résoudre une équation pareille à la proposée.

Avec un peu de connoissance du calcul, on devoit bien s'attendre que la substitution de $x+r$ à la place de y ne pouvoit pas faire évanouir plusieurs termes à la fois, parce que l'introduction d'une inconnue ne peut servir qu'à résoudre une seule équation; ou, ce qui revient au même, à remplir une condition: or l'éva-

jouissement de chaque terme fait une condition. Mais si par cette transformation, on n'est pas parvenu entièrement au but que l'on avoit eu de réduire l'équation proposée à deux termes, on a du moins changé la question en une nouvelle qui paroît plus simple. puisqu'il ne s'agit plus que d'une équation à trois termes.

Des deux équations transformées qu'on peut avoir en faisant évanouir, ou le premier, ou le second terme; la première, c'est-à-dire,

$$x^3 + e\,x + \tfrac{2}{27}d^3 = 0$$
$$-\frac{d^2}{3} - \frac{de}{3}$$
$$+ f$$

est la plus simple; aussi est-ce celle que nous allons chercher à résoudre, en tâchant de diminuer encore le nombre de ses termes: mais nous suspendrons un moment cette recherche, parce que la méthode qu'on vient d'employer pour transformer les équations du troisième degré, offre si naturellement de nouvelles vérités sur les équations de tous les autres degrés, qu'il est à propos de s'y arrêter un peu.

III.

On voit d'abord qu'à l'aide de la même transformation de y en $x + r$, on peut aussi faire

évanouir le terme qu'on voudra d'une équation d'un degré quelconque.

Transformation précédente appliquée à une équation du quatrième degré.

Qu'on ait, par exemple, l'équation du quatrième degré la plus générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$, en y substituant $x + r$ au lieu de y, on aura

$$\begin{array}{rrrrrr} x^4 & + 4rx^3 & + 6r^2x^2 & + 4r^3x & + r^4 & = 0 \\ & + a & + 3ar & + 3ar^2 & + ar^3 & \\ & & + b & + 2br & + br & \\ & & & + c & + cr & \\ & & & & + d & \end{array}$$

dans laquelle faisant $4r + a = 0$, ou $r = -\frac{1}{4}a$, on aura une équation du quatrième degré qui n'aura point de second terme.

De même en déterminant r par l'équation du second degré $6r^2 + 3ar + b = 0$, on aura une équation du quatrième degré qui n'aura point de troisième terme. Et en faisant r tel qu'il conviendroit pour résoudre l'équation du 3eme degré $4r^3 + 3ar^2 + 2br + c = 0$, on auroit une équation du 4eme degré qui n'auroit point de quatrième terme. Le cinquième s'en iroit de même par le moyen d'une équation du 4eme degré. Mais on ne s'arrête pas ordinairement à faire évanouir d'autres termes que le second, parce que l'évanouissement des autres termes amène presque toujours des calculs compliqués de radicaux et fort pénibles.

IV.

Dans une équation générale du cinquième degré $y^5+ay^4+by^3+cy^2+dy+e=0$, la transformée $y=x+r$ donne l'équation x^5+5rx^4+, etc. dont le second terme $+a$ s'évanouira par l'équation du premier degré $5r+a=0$, ou $r=-\frac{1}{5}a$.

Evanouissement du second terme dans une équation du cinquième degré.

V.

Et en général dans une équation d'un degré quelconque m représentée par $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+$ etc. $=0$, il sera aisé de trouver par la formule des puissances, donnée dans la IVeme partie, article XLVIII, que le second terme s'évanouira en faisant l'inconnue $x=y-\frac{a}{m}$.

Dans une équation d'un degré quelconque m.

VI.

Après cette petite digression, remettons-nous à chercher la solution de l'équation du troisième degré. . . . . .

Résolution de l'équation générale $x^3+px+q=0$.

$$x^3+ex+\tfrac{2}{27}d^3=0$$
$$-\frac{d^2}{3}-\frac{de}{3}$$
$$+f$$

à laquelle l'équation générale $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$ s'étoit réduite par la supposition de $y = r - \frac{1}{3}d$; et pour abréger les calculs, écrivons-la ainsi $x^3 + px + q = 0$.

En suivant l'idée que nous avons déjà employée, faisons encore une transformée. Substituons, par exemple, $u + z$ à la place de x; non dans la vue de faire évanouir un terme de cette équation, ainsi qu'on se l'étoit proposé la première fois; car on verroit bientôt que le terme qui avoit disparu reviendroit; mais pour décomposer cette équation en d'autres qui soient plus simples. Sans voir distinctement qu'un tel moyen doit réussir, on sent bien que la transformation d'une équation en une autre, où l'on a une lettre à déterminer à volonté, ne peut guères manquer d'être utile.

La substitution de $x = u + z$ étant faite, il vient $u^3 + 3uuz + 3uzz + z^3 + pu + pz + q = 0$. Supposons maintenant que l'une des inconnues u ou z soit telle que $u^3 + z^3 + q = 0$; on aura, dans ce cas, l'équation $3u^2z + 3uz^2 + pu + pz = 0$, qui étant divisée par $u + z$, donne $3uz + p = 0$, ou $u = -\frac{p}{3z}$. Voilà donc une équation avec laquelle on chassera facilement une des incon-

nues introduites ; il ne s'agit plus que de savoir quelle sera l'équation qui déterminera l'autre inconnue. Pour cela, il faut remettre cette valeur de u dans la première équation $u^3 + z^3 + q = 0$; ce qui donnera $-\frac{p^3}{27z^3} + z^3 + q = 0$, ou $z^6 + qz^3 = \frac{p^3}{27}$. Or, cette équation, quoique d'un degré plus haut que la proposée, est cependant bien plus facile à résoudre ; car elle est de la classe de celles que nous avons résolues dans la quatriéme partie, article XX., et la valeur qu'elle donne pour z est. . . . . $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$. Donc u ou $-\frac{p}{3z}$ sera $-\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$ qui se réduit facilement à $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$; car on peut voir facilement que le produit de

$$-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}$$

par $+\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ est $\frac{1}{27}p^3$, et partant que $\frac{1}{3}p$ est le produit des racines cubes de ces quantités. Ajoutons présentement ces valeurs de u et de z, et nous aurons $u + z$, ou

$$= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

ou simplement . . . . . .

$$= \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{+\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}};$$

car en prenant le radical $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ en $-$, on n'a pas une valeur de x différente de celle qu'on a en le prenant en $+$.

VII.

La formule précédente ne donne qu'une des trois racines.

Par cette valeur de x, on voit qu'il n'en est pas des équations du troisième degré comme de celles du second, où la même expression d'une racine marquoit, à l'aide du signe $\pm$, les deux racines à la fois; ici on trouve une expression qui ne sauroit désigner qu'une des trois valeurs de x.

Manière d'avoir les deux autres.

Pour trouver les deux autres, il faut diviser l'équation $x^3 + px + q = 0$, par la racine que donne la valeur précédente de x, et l'équation du second degré qui en sera le quotient, donnera par sa résolution les deux autres racines cherchées.

Si l'on veut trouver la valeur générale de ces deux racines, il faut faire pour abréger les calculs $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} = m$,

et $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}=n$,
et faire attention que dans ce cas, $mn=\frac{1}{3}p$ et $m^3-n^3=q$. Cela posé, la division de l'équation $x^3+px+q=0$ par $x+m-n$, qui est alors la racine qu'on vient de trouver, donnera pour quotient $xx+nx-mx+mm+nn+mn=0$, dont les deux racines, c'est-à-dire celles qui nous restent à trouver dans l'équation $x^3+px+q=0$, sont $x=\frac{m-n}{2}\pm\frac{1}{2}\times\overline{m+n}\sqrt{-3}$, ou

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$$

qui sont nécessairement imaginaires, toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ est une quantité réelle. On auroit pu reconnoître dès l'article V de la quatrième partie, où il n'étoit question que des équations à deux termes, l'espece d'imperfection que donne à la solution des équations du troisième degré, la différence de forme des trois racines ; mais cette espèce d'imperfection est ici plus frappante, en se trouvant dans la solution générale.

VIII.

Ce désavantage de la solution précédente des

Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître x à cause des imaginaires qu'elle renferme.

équations du troisième degré n'en peut paroître un qu'à ceux qui considèrent, pour ainsi dire, métaphysiquement l'Algébre ; mais il y en a un autre bien plus frappant pour tout le monde, et qui a extrêmement exercé tous les calculateurs. C'est que cette solution n'apprend rien du tout pour la valeur de x toutes les fois que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}qq$, et qu'il est en même tems négatif. Dans ce cas, qui est très-étendu, la valeur de la quantité $\sqrt{\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2}$ est imaginaire, et par conséquent les deux quantités $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ et $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ qui composent la valeur de x sont imaginaires aussi ; mais on n'en sauroit conclure pour cela que la valeur de x soit imaginaire ; ce qui, bien loin d'être regardé comme un vice de la solution, la rendroit uue solution complette ; et on ne sauroit non plus, du moins par les méthodes connues jusqu'à présent, déterminer quelle est la quantité réelle qu'exprime cette valeur de x.

IX.

Non-seulement on ne sauroit conclure de l'expression que x a dans ce cas, que la racine cherchée est imaginaire ; mais on s'est assuré

par divers moyens que cette valeur étoit toujours réelle alors : voici de tous ces moyens celui qui m'a paru le plus direct (1).

Soit reprise la valeur. . . . . $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ de x, et soit mis dans cette valeur à la place de $\frac{1}{2}q$, a, et à la place de $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ supposé imaginaire, $b\sqrt{-1}$; on aura . . . . . $x=\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$.

On démontre cependant que dans ce cas x est réel.

Cherchons maintenant les valeurs de . . . . $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ et de $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ par la formule donnée dans la quatrième partie, article XLVIII, pour l'élévation du binome.

La première de ces deux quantités deviendra $-a^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2$ $-\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b4+$ etc.

Et la seconde,

$-a^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}a^{-\frac{2}{3}}b\sqrt{-1}-\frac{1}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2$ $+\frac{5}{81}a^{-\frac{8}{3}}b^3\sqrt{-1}+\frac{10}{243}a^{-\frac{11}{3}}b4-$, etc.

(1) Je l'ai tiré d'un mémoire de M. Nicole membre de l'Académie, année 1738, p. 99 et 100.

et par conséquent la valeur de x sera la suite infinie $-2a^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9}a^{-\frac{5}{3}}b^2 + \frac{20}{243}a^{-\frac{11}{3}}b^4 - \frac{308}{6561}a^{-\frac{17}{3}}b^6 +$, etc. ou. . . . . .

$$-2a^{\frac{1}{3}} \times 1 + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{10\,b^4}{243\,a^4} + \frac{154\,b^6}{6561\,a^6} -, \text{ etc.}$$

qui ne contient aucune racine imaginaire. Donc dans le cas où $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et plus grand que $\frac{1}{4}qq$, la valeur. . . . . .

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}}$$

de x, qui est alors sous une forme imaginaire, est cependant une quantité toujours réelle. Malheureusement on n'a pu jusqu'à présent lui trouver une forme réelle qu'en admettant, ainsi qu'on vient de faire, une infinité de termes dans son expression; ce qui ne peut servir qu'à prouver que cette valeur est réelle, mais non à la faire connoître exactement.

X.

Par la même méthode on trouvera une valeur approchée de x.

Si l'on veut se contenter d'une approximation, on pourra faire usage de la série précédente; car, en supposant a plus grand que b, les termes de cette série iront en diminuant, et par conséquent on pourra négliger les derniers, quand ils seront parvenus à n'être que de très-

petites quantités. S'il arrive, au contraire, que a soit plus petit que b, il faudra, en employant la formule du binome pour trouver $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ et $-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, avoir l'attention de prendre $b\sqrt{-1}$ pour le premier terme du binome, et a pour le second; l'on aura alors pour la valeur de x ou de $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, la quantité

$$+\tfrac{2}{3}b^{-\frac{2}{3}}a-\tfrac{10}{81}b^{-\frac{8}{3}}a^3+\tfrac{44}{729}b^{-\frac{14}{3}}a^5$$
$$-\tfrac{748}{19683}b^{-\frac{20}{3}}a7+, \text{ etc.}$$

ou $-\dfrac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}\times-1+\dfrac{5a^2}{27b^2}-\dfrac{22a^4}{243b^4}+\dfrac{374^6}{6561b^6}$ etc. qui est aussi réelle que l'autre expression, et dont tous les termes décroissent quand a est plus petit que b.

XI.

Nous avons vu, article VII, que des trois racines de l'équation $x^3+px+q=0$, celles qui sont exprimées par. . . . . Les deux autres valeurs de x sont aussi réelles dans le même cas.

$$x=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}-\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$
$$\pm\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$$

sont toutes deux imaginaires, toutes les fois

que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ étoit une quantité réelle; nous allons voir présentement que ces deux racines sont toujours réelles toutes les fois que $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}$ est imaginaire, c'est-à-dire, toutes les fois que p est négatif, et tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}q^2$.

Car si on change, à l'aide des dénominations qu'on vient d'employer, l'expression de ces deux valeurs de x en. . . . . .

$$\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}}{\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}\times\sqrt{-3}}$$

et qu'on réduise, ainsi qu'on vient de faire, les quantités $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}$ et $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ en séries, on aura pour ces deux valeurs de x,

$$a^{\frac{1}{3}}\times 1+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{10\,b^4}{243\,a^4}+\frac{154\,b^6}{6561\,a^6}-\text{etc.}$$

$$\pm\frac{1}{3}\frac{b\sqrt{3}}{a^{\frac{2}{3}}}\times 1-\frac{5b^2}{27\,a^2}+\frac{22\,b^4}{243\,a^4}-\frac{374\,b^6}{6561\,a^6}+$$

etc. expression entièrement réelle.

XII.

Comme l'équation la plus générale du troi-

sième degré, représentée par . . . . . Comment des racines de l'équation $x^3+px+q=0$, on tire celles de l'équation $y^3+dy^2+ey+f=0$.

$$y^3+dy^2+ey+f=0$$

s'est réduite à

$$x^3+ex+\tfrac{2}{27}d^3=0\ -\frac{d^2}{3}\ -\frac{de}{3}\ +\left(f\right.$$

ou simplement $x^3+px+q=0$, par la supposition de $y=x-\frac{1}{3}d$, il s'ensuit que les valeurs de y dans l'équation générale $y^3+dy^2+ey+f=0$ sont celles qu'on a en résolvant cette dernière équation $x^3+px+q=0$, et en retranchant de ses trois racines $\frac{1}{3}d$.

XIII.

De-là, il suit qu'une équation quelconque du troisième degré, sera entièrement dans le même cas par rapport aux racines réelles ou imaginaires, que l'équation qu'elle produit par l'évanouissement du second terme. Une équation du troisième degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires.

Ainsi on voit, en se rappellant les articles VII et IX, que toute équation du troisième degré doit au moins avoir une racine réelle, et que les deux autres sont toujours, ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires.

XIV.

Pour distinguer lequel de ces deux cas arrive Comment on distingue ces cas.

dans une équation du troisième degré donnée; on commencera par en faire évanouir le second terme, afin de la pouvoir comparer à l'équation $x^3 + px + q = 0$; et lorsque cette opération sera faite, si p est positif, ou qu'étant négatif, il soit tel que $\frac{1}{27}p^3$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{4}qq$, il n'y aura qu'une racine réelle, laquelle sera déterminée exactement par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, p est négatif et tel que $\frac{1}{27}p^3$ soit plus grand que $\frac{1}{4}qq$, les trois racines seront réelles; mais aucune d'elles ne pourra être déterminée par la formule de l'article VI, à moins qu'on ne se contente d'une approximation comme celles qu'on a, en transformant cette formule en une suite infinie.

XV.

Quelles sont les racines, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ est négatif et $= \frac{1}{4}qq$.

S'il arrivoit que $\frac{1}{27}p^3$ fût négatif et égal à $\frac{1}{4}qq$, on pourroit trouver de la difficulté à déterminer auquel des deux cas précédens l'équation se rapporteroit, c'est-à-dire, qu'on ne sauroit s'il devroit y avoir seulement une racine réelle, ou si toutes les trois le seroient, à cause que $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}q^2}$ qui est alors zéro, peut également se compter parmi les quantités positives,

ou parmi les négatives ; mais l'inspection des trois racines ou valeurs d'x trouvées précédemment, décide bientôt la question. Car la première valeur exprimée par . . . . . $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ se réduit alors à $-2\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$, et les deux autres valeurs exprimées généralement par . . . . . $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$ $\pm\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}\times\sqrt{-3}$ se réduisent alors à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm 0}$, c'est-à-dire, qu'elles sont toutes deux égales à $+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q}$. Ainsi les équations où $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ est zéro, sont comptées parmi celles dans lesquelles les trois racines sont réelles.

XVI.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Pour faire présentement quelques applications des règles précédentes, supposons d'abord qu'on ait l'équation $y^3+3yy-3y+25=0$ à résoudre ; on commencera par faire évanouir le second terme de cette équation ; ce qui se fera suivant l'art. II, en supposant $y=x-1$, et l'équation, délivrée du second terme, que l'on aura par cette substitution, sera $x^3-6x+30$

$= 0$ qui étant comparée à $x^3 + p\,x + q = 0$, donne $p = -6$, et $q = 30$.

Ces valeurs étant substituées dans $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, cette quantité devient $\sqrt{217}$ qui est une quantité réelle ; ainsi la formule de l'article VI doit donner, dans ce cas, la valeur cherchée de x.

Si l'on fait donc dans cette formule . . . . . $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$, les substitutions de 15 pour $\frac{1}{2}q$ et de $\sqrt{217}$ pour $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, cette valeur générale de x devient $\sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{15 + \sqrt{217}}$ qui est la seule racine réelle que contienne l'équation $x^3 - 6x + 30 = 0$, et qui ne sauroit être réduite à une plus simple expression. Substituant ensuite la valeur de x dans l'équation $y = x - 1$, on aura $y = \sqrt[3]{-15 + \sqrt{217}} - \sqrt[3]{15 + \sqrt{217}} - 1$, pour la seule racine réelle de l'équation proposée $y^3 + 3yy - 3y + 25 = 0$.

XVII.

Autre exemple contenant une équation du sixième degré qui se réduit au troisième.

Si on avoit une équation du sixième degré, où l'inconnue ne se trouvât à aucune dimension impaire, il est évident qu'on la résoudroit par la même méthode que la précédente, puisque cette équation se réduiroit tout de suite au

troisième degré par une transformation. Qu'on ait, par exemple, $z^6 + 9z^4 + 39zz + 55 = 0$; en regardant zz comme l'inconnue de cette équation, et supposant, suivant les principes précédens, zz égal à une nouvelle inconnue x moins un tiers du coëfficient du second terme, c'est-à-dire $zz = x - 3$, on changera cette équation en $x^3 + 12x - 8 = 0$ qui n'est que du troisième degré, et qui n'a point de second terme.

Comparant alors cette équation avec ..... $x^3 + px + q = 0$, on a $p = 12$, $q = -8$, et partant $\sqrt{\frac{1}{27}p^3 + \frac{1}{4}qq} = \sqrt{80}$; d'où x, ou

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}}$$
$$= \sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{-4 + \sqrt{80}},$$

et comme, par la supposition, $zz = x - 3$, ou $z = \pm\sqrt{x-3}$, on aura alors l'inconnue cherchée

$$z = \pm\sqrt{\sqrt[3]{4 + \sqrt{80}} - \sqrt[3]{-4 + \sqrt{80}} - 3}$$

et les deux valeurs que cette expression donne en prenant le radical en + et en —, sont les seules réelles des six que doit avoir l'équation proposée.

En général, qu'on ait une équation telle que $z^{3m} + az^{2m} + bz^m + c = 0$, on la réduira tout ainsi. Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi.

de suite à une du troisième degré et sans second terme, en faisant $z^m = x - \frac{1}{3}a$.

XVIII.

Supposons présentement qu'on ait l'équation $x^3 + 3x - 4 = 0$, à résoudre; cette équation n'ayant point de second terme, on peut tout de suite la comparer à $x^3 + px + q = 0$, et l'on a par cette comparaison $p = 3$ et $q = -4$, et comme p est positif, on voit, par l'article XIV, que la formule générale de l'article VI doit encore réussir dans ce cas. Substituant en effet ces valeurs de p et de q dans la formule générale . . . . . ,

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}}$$

on a pour la seule valeur de x . . . . . $\sqrt{2+\sqrt{5}} - \sqrt{-2+\sqrt{5}}$. Si l'on applique présentement à cette expression la méthode de la quatrième partie, articles XXXV, XXXVIII et XLI, on verra qu'elle se peut aisément réduire, parce que $2 + \sqrt{5}$ est le cube de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, et que $-2 + \sqrt{5}$ est celui de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. D'où cette valeur de x se réduit à 1.

On auroit pu parvenir à cette même valeur de x sans la formule précédente, en employant

la régle de la troisième partie, articles XII et XIII; car on auroit trouvé que $x - 1$ étoit un diviseur exact de la quantité $x^3 + 3x - 4$.

XIX.

Quatrième exemple dans lequel la formule de l'article VI est insuffisante.

Soit maintenant proposé de résoudre l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$. En comparant cette équation à l'équation générale $x^3 + px + q = 0$, on a $p = -90$ et $q = -98$: or, p étant négatif et tel que $\frac{1}{27}p^3$ est plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, l'équation proposée est de celles qui ne peuvent pas se résoudre par la formule précédente. Je cherche alors par la méthode de la troisième partie, articles XII et XIII, si elle n'aura pas quelque diviseur, et ayant reconnu qu'elle n'en a point, je me sers de la méthode enseignée, article X, pour trouver une valeur approchée.

Application de la méthode de l'art. X pour approcher des racines.

Pour cela, je commence par substituer pour p et q leurs valeurs -90 et -98 dans la formule générale . . . . . .

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}} - \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{27}p^3 + \tfrac{1}{4}q^2}}$$

et j'ai . . . . . .

$$x = \sqrt[3]{49 + \sqrt{-24599}} - \sqrt[3]{-49 + \sqrt{-24599}}$$

qui étant comparée à l'expression . . . . . $\sqrt[3]{-a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$, laquelle est devenue (article X) la suite infinie

$$-\frac{2a}{3b^2}\times\sqrt{-1}+\frac{5a^3}{2^7b^3}-\frac{22a^4}{243b^4}+\frac{374a^6}{6561b^6}$$

—etc. donne $a=-49$, $bb=+24599$, qu'il ne s'agit plus que de substituer dans cette suite infinie.

Pour faire cette substitution, je commence par prendre la racine cube de 24599, afin d'avoir $b^{\frac{2}{3}}$; l'opération faite, j'ai environ 29,08 pour cette racine cube, et partant $-\frac{2a}{3b^{\frac{2}{3}}}$, ou $\frac{98}{3\sqrt[3]{24599}}$ est environ $\frac{7820}{8724}$.

Quarrant ensuite a, et le divisant par bb, j'ai pour $\frac{a^2}{b^2}$ environ 0,0979, dont le quarré 0,009584 est la valeur de $\frac{a^4}{b^4}$; quant à la valeur de $\frac{a^6}{b^6}$, et des puissances plus élevées, elle est inutile dans cette suite dont la marche est assez prompte.

Faisant alors les substitutions des valeurs de $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^4}{b^4}$ à la place de ces quantités, j'ai en

ron — 1, 104 pour la valeur de x donnée par la formule de l'article VI; si on veut avoir les deux autres valeurs de x qui doivent aussi être réelles, suivant l'article XIV, il n'y a qu'à diviser l'équation $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1{,}104$ qui est à très-peu de chose près, suivant ce que l'on vient de voir, une de ses racines. La division faite, on a pour quotient $xx - 1{,}104x - 88{,}781$, et pour reste $0{,}0142$ quantité assez petite pour être négligée; de sorte qu'on peut regarder l'équation $xx - 1{,}104x - 88{,}781 = 0$, comme le quotient exact de la division de $x^3 - 90x - 98 = 0$ par $x + 1{,}104$, et comme le produit des deux racines cherchées. Résolvant donc cette équation, on a pour les deux valeurs de x qu'elle donne $x = 0{,}552 \pm \sqrt{89{,}0857}$, c'est-à-dire, $+ 9{,}990$ et $- 8{,}886$.

Ainsi les trois valeurs de x dans l'équation proposée $x^3 - 90x - 98 = 0$ sont à peu près $-1{,}104$; $+ 9{,}990$; $-8{,}886$. Quant aux valeurs exactes, aucune des méthodes connues jusqu'à présent ne sauroit les faire trouver; et toute équation, qui ayant, comme la précédente, ses coëfficiens rationels, n'aura aucun diviseur rationel, sera de même irrésoluble par ces méthodes, lorsque $\frac{1}{27}p^3$ sera négatif et plus grand que $\frac{1}{4}qq$.

Cas irréductible du troisième degré.

XX.

Inconvénient de l'approximation enseignée, article X.

La méthode que nous venons d'employer pour résoudre par approximation les équations du troisième degré dont les trois racines sont réelles, a cet inconvénient, que lorsque a diffère peu de b, les termes de la série qui exprime la valeur de x décroissent si lentement, qu'il en faut un très-grand nombre pour approcher un peu exactement de la vraie valeur de x, et que par conséquent les calculs deviennent extrêmement pénibles. Il est donc à propos de chercher quelque méthode plus généralement commode.

XXI.

Autre méthode d'approximation générale et facile dans la pratique.

Dans cette vue, je reprends l'équation $x^3 + px + q = 0$, ou plutôt $x^3 - px + q = 0$ (les cas qui échappent à la méthode de l'article VI ne se trouvant jamais que parmi ceux où p est négatif), et je me propose de lui donner cette forme $z^3 - z = r$ qui est plus simple, à cause qu'elle ne renferme qu'un terme d'indéterminé.

Afin de faire cette transformation, je fais $x = mz$; ce qui change l'équation. . . . . .

$x^3 - px + q = 0$ en $z^3 - \frac{p}{mm} z = -\frac{q}{m^3}$ qui m'apprend qu'en faisant $m = -\sqrt{p}$, si q est positif, et $m = \sqrt{p}$, si q est négatif, je donnerai toujours à l'équation $x^3 - px + q = 0$ la forme $z^3 - z = +r$.

Je remarque présentement que si cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sauroit résoudre, il faudra nécessairement que r soit plus petit que $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, ou $\sqrt{\frac{4}{27}}$; et qu'en même-tems il y ait une des racines qui soit positive, et plus grande que l'unité, mais moindre que $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Car si z surpassoit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, on auroit pour r, c'est-à-dire, pour $z^3 - z$ un nombre plus grand que $\sqrt{\frac{4}{27}}$, et par conséquent l'équation $z^3 - z = r$ seroit du nombre de celles où la formule de l'art. VI réussit.

Cela posé, je fais $z = 1 + \delta$, et substituant cette valeur dans l'équation $z^3 - z = r$, elle donne $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, dans laquelle je remarque que δ étant une quantité toujours plus petite que $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, c'est-à-dire, plus petite que 0, 155, son cube est plus petit que 0, 0037. Or, ce cube étant donc si petit, je vois qu'on ne peut commettre une grande erreur, en négligeant le terme δ^3 dans l'équation $2\delta + 3\delta\delta + \delta^3 = r$, c'est-à-dire, en se contentant de

résoudre l'équatinn $2\delta + 3\delta\delta = r$. Je résous donc cette équatiòn, et elle me donne

$$\delta = \pm \sqrt{\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}r} - \tfrac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{1+3r} - 1}{3}$$

et par conséquent z, ou $1 + \delta = \frac{2 \pm \sqrt{1+3r}}{3}$,

ou simplement $z = \frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, puisque des valeurs de z on ne cherche que celle qui surpasse l'unité et qui est positive.

Pour savoir à quoi peut monter l'erreur qu'on commet dans cette méthode, en négligeant le terme δ^3, prenons le cas où ce terme est le plus grand; supposons que z ou $1 + \delta$ soit $\sqrt{\frac{4}{3}}$, ce qui ne peut jamais arriver, tant que l'équation proposée est de celles qui échappent à la méthode de l'article VI. Nous aurons alors $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, et notre méthode nous donnera pour valeur de z, $\frac{2+\sqrt{1+\sqrt{\frac{4}{3}}}}{3}$, au lieu de la vraie valeur $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Or, il est aisé de reconnoître que ces deux quantités ne diffèrent entre elles que d'environ un millième; voilà donc la plus grande erreur qu'on puisse craindre, en prenant $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$ pour la racine positive

de l'équation $z^3 - z = r$, si cette équation est de celles où la formule de l'article VI ne peut s'appliquer.

La méthod qu'on vient d'enseigner donne d'abord á un millième près.

Ayant calculé la valeur de z par l'expression $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, il faudra la multiplier par m pour avoir la valeur de x.

XXII.

Si on ne trouve pas que cette résolution de l'équation proposée approche assez de la véritable, c'est-à-dire, qu'on regarde les erreurs qui pourroient aller aux environs d'un millième comme trop considérables, rien ne sera plus aisé que de trouver une autre valeur de la racine beaucoup plus exacte, par une opération fondée sur les mêmes principes. Après avoir calculé cette première valeur de x, et l'avoir nommée pour abréger k, on imaginera que la correction qu'il faut lui faire soit ε, c'est-à-dire, qu'on supposera que le véritable x soit $k + \varepsilon$. Substituant alors cette quantité pour x dans l'équatiou $x^3 - px + q = 0$, l'on aura $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - pk - p\varepsilon + q = 0$, ou simplement $k^3 + 3k^2\varepsilon + 3k\varepsilon^2 - pk - p\varepsilon + q = 0$ en négligeant le terme ε^3

qui est bien plus négligeable que ne l'étoit le terme ω^3 à la première opération, puisqu'il est infiniment plus petit. Résolvant ensuite cette équation, la valeur de ε qu'elle donnera, sera la correction, qui, étant faite à la première valeur de x, en donnera une seconde infiniment plus exacte.

Si on n'étoit pas encore content de cette seconde, on en trouveroit une troisième en nommant la seconde valeur l, et substituant $l+\varphi$ à la place de x dans l'équation proposée $x^3 - px + q = 0$, et ainsi de suite.

Mais bien loin qu'on ait communément besoin d'employer des corrections si multipliées, on pourra très-souvent se contenter de la valeur de x trouvée en premier lieu, ou tout au plus il suffira, après la substitution de $k+\varepsilon$ pour x dans l'équation $x^3 - px + q = 0$, de résoudre l'équation $k^3 + 3k^2\varepsilon - pk - p\varepsilon + q = 0$; c'est-à-dire, qu'on pourra non-seulement négliger le terme ε^3, mais le terme $3k\varepsilon^2$, parce que ce terme est déjà très-petit.

XXIII.

Faisons présentement quelque application de cette méthode. Soit, par exemple, l'équation

$z^3 - z = \frac{1}{3}$. En substituant $\frac{1}{3}$ pour r dans l'expression $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, elle deviendra . . . . $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$, c'est-à-dire, environ 1,138 qui est un peu plus grande que la vraie valeur de z; mais qui l'est de bien peu, puisque 1,137, comme on peut le voir aisément par le calcul, seroit trop petit. Application de cette méthode à un exemple.

Pour approcher plus exactement de la vraie valeur de z, on substituera $1,138 + \varepsilon$ à la place de z dans l'équation $z^3 - z = \frac{1}{3}$, et l'on aura $0,002426739 + 2,885132\,\varepsilon = 0$ en négligeant les termes affectés de ε^2 et de ε^3. Cette équation étant résolue, elle donne $\varepsilon = -0,000841$, et partant pour la valeur de z corrigée, 1,137159. Si on avoit voulu faire cette correction plus exacte en ne négligeant que le terme affecté de ε^3, on auroit résolu l'équation $0,002426739 + 2,885132\,\varepsilon + 3,414\varepsilon^2 = 0$, ce qui auroit donné la correction $\varepsilon = -0,000841836$, c'est-à-dire, pour z corrigé 1,137158164.

XXIV.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de résoudre l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$; je fais Autre exemple.

$x = -z\sqrt{13}$, et elle se change en

$z^3 - z = \frac{5}{13\sqrt{13}}$: égalant donc r à $\frac{5}{13\sqrt{13}}$ dans la première valeur approchée $\frac{2+\sqrt{1+3r}}{3}$, de z, cette valeur devient $\frac{2+\sqrt{1+\frac{15}{13\sqrt{13}}}}{3}$, et elle donne par conséquent pour x ..... $\frac{-2\sqrt{13}-\sqrt{13+\frac{15}{\sqrt{13}}}}{3}$, c'est-à-dire, environ $-3,784$. Si on veut avoir une valeur de x plus exacte, on supposera $x = -3,784 + \varepsilon$; on substituera cette valeur dans l'équation $x^3 - 13x + 5 = 0$, et l'on aura en négligeant les termes affectés de ε^2 et de ε^3, l'équation $0,010205696 + 29,95597\,\varepsilon = 0$, qui donnera $\varepsilon = -0,000341$, et par conséquent $x = -3,784341$, valeur plus exacte que la première.

XXV.

Résolution de l'équation générale du quatrième degré.

Après avoir montré la manière dont on parvient à la solution des équations du troisième degré, voyons maintenant les moyens qu'il

faut employer pour résoudre celles du quatrième degré.

Prenant d'abord une équation générale $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ pour représenter toutes les équations du quatrième degré, on réduit bientôt la difficulté à ne résoudre qu'une équation représentée par $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, en faisant $y = z - \frac{1}{4}a$. Ensuite, pour résoudre cette équation, ce qui paroît le plus simple, c'est de la regarder comme le produit de deux équations du second degré, et de faire en sorte que la détermination des coëfficiens que doivent avoir les termes de ces équations du second, ne dépendent que d'équations plus aisées à résoudre que la proposée.

Soit pris d'abord $zz + xz + t = 0$ pour l'une de ces équations; il est évident que l'autre devra avoir pour second terme $-xz$, puisque le produit de ces deux équations doit donner une équation dénuée du second terme : soit donc pris pour cette seconde équation $zz - xz + s = 0$, en multipliant ces équations l'une par l'autre, on aura . . . . . .

$$z^4 + szz + sxz + ts = 0,$$
$$- x^2 - tx$$
$$+ t$$

qui, étant comparée avec la proposée, donne, pour déterminer s, t, x, les trois équations $s - x x + t = p$, $s x - t x = q$, $t s = r$.

Pour faire usage de ces trois équations, je multiplie la première par x, et je l'ajoute ensuite avec la seconde équation ; j'ai alors $2 s x - x^3 = p x + q$, d'où je tire . . . . . $s = \frac{q + p x + x^3}{2 x}$ que je substitue dans l'équation $t s = r$, ce qui me donne . . . . . $t = \frac{2 r x}{x^3 + p x + q}$.

Or ces deux valeurs de s et de t étant mises dans l'équation $s x - t x = q$, j'ai enfin

$$\frac{x^3 + p x + q}{2} - \frac{2 r x^2}{x^3 + p x + q} = q, \text{ ou}$$

$$x^6 + 2 p x^4 + p p x^2 - q^2 = 0,$$
$$- 4 r$$

La résolution d'une équation du quatrième degré dépend d'une équation du troisième.

équation du sixième degré, qui, par la méthode de l'article XVII, se change en une du troisième, d'où la difficulté des équations du quatrième degré est réduite à celle du troisième. Car cette dernière équation (qu'on appelle la réduite) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donne dans

Cette équation s'appelle la réduite.

les équations $zz - xz + s = 0$, $zz + xz + t = 0$, ou plutôt $zz - xz + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = 0$ et $zz + xz + \frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} = 0$, et résoudre ensuite ces équations, ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de x dans les racines $z = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$ et $z = -\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{2r}{xx + p + \frac{q}{x}} + \frac{1}{4}xx}$ de ces deux équations; et l'on aura les quatre racines cherchées de l'équation $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, et partant celles de l'équation proposée $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ qui l'avoit produite.

XXVI.

Il paroît d'abord par l'expression de ces valeurs, que dans le quatrième degré, ainsi que dans le troisième, on ne sauroit arriver à une seule expression pour toutes les racines de l'équation. Cependant si on remarque que la quantité x que renferment les deux expressions précédentes, est nécessairement un radical quarré,

Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule.

puisqu'elle est venue de la résolution d'une équation où x n'est élevé qu'à des puissances paires, on verra sans peine que chacune des expressions précédentes peut désigner quatre racines, la prémière s'écrivant alors ainsi . . .

$z = \pm\frac{1}{2}x \pm \sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$, et la seconde . . . . . .

$$z = \mp\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \pm \frac{q}{x}}}.$$

Ces deux équations paroissant d'abord différentes, on peut craindre de s'être trompé dans le raisonnement précédent; puisqu'il semble mener à une absurdité, qui seroit d'avoir huit racines pour une équation du quatrième degré; mais il est aisé de voir qu'elle n'est qu'apparente; car l'identité de ces deux expressions se réduit à celle de . . . . . .

$$\sqrt{\frac{1}{4}xx - \frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}}$$

et de $\sqrt{-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$, c'est-à-dire, de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$, et de $-\frac{2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$.

Or, l'identité de ces deux dernières quantités ne sauroit manquer d'avoir lieu aussitôt que x a été déterminée par l'équation . . . . . .

$$x^6 + 2px^4 + p^2x^2 - q^2 = 0$$
$$- 4r$$

puisque cette équation se tire évidemment de l'égalité de $-\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}$ et de $\frac{-2r}{xx + p \mp \frac{q}{x}}$.

XXVII.

Des deux expressions précédentes, la première

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

étant la plus aisée à employer, sera celle qu'il faudra choisir, et les quatre valeurs générales de z, qu'elle exprime à la fois, sont . . . . .

$$z = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = \tfrac{1}{2}x - \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\tfrac{1}{2}x + \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

$$z = -\tfrac{1}{2}x - \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2x}}$$

XXVIII.

Comme l'équation d'où l'on tire la valeur de x, donne nécessairement trois valeurs de x précédées du signe $\pm$, et qu'on n'a aucune raison pour préférer l'une de ces valeur aux autres ; que d'ailleurs on sait qu'une équation du quatrième degré ne sauroit avoir plus de quatre racines, il vient assez naturellement dans l'esprit qu'on peut indifféremment employer celle qu'on voudra de ces trois valeurs de x précédée de $\pm$, et en tirer cependant toujours la même expression pour les quatre valeurs de z.

On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatrième degré, quelle que soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise.

Mais, quoiqu'après avoir un peu réfléchi sur la théorie des équations, on ne puisse guéres douter que cela ne soit ainsi, on doit souhaiter de s'en assurer par le détail du calcul.

Pour y parvenir, ce qui se présente le plus naturellement, c'est de trouver les trois valeurs de x précédées de $+$, que donne l'équation

$$x^6 + 2p\,x^4 + pp\,x^2 - q^2 = 0,$$
$$-4r$$

et les substituer ensuite l'une après l'autre dans l'expression . . . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} x x - \tfrac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$$

afin de reconnoître l'identité des trois différentes expressions qu'on auroit par ces substitutions ; mais le calcul que cette méthode demanderoit est si long, qu'on ne sauroit se résoudre à le suivre jusqu'au bout. Voici une autre manière de parvenir au même résultat.

Je remarque d'abord que, quelle que soit la valeur de x que je substitue dans l'expression générale $z = \pm \tfrac{1}{2} x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4} x x - \tfrac{1}{2} p \mp \frac{q}{2x}}$, les quatre valeurs de z, exprimées à la fois par cette quantité, pourront être représentées par $i + k, i - k, -i + l, -i - l$, ou, ce qui revient au même, que les quatre facteurs de l'équation $z4 + p\,zz + q\,z + r = 0$ pourront être représentés par $z - i - k, z - i + k, z + i - l, z + i + l$; i désignant alors la partie $\tfrac{1}{2} x$ de la valeur de z, et k et l les deux quantités . . . .

$$\sqrt{-\tfrac{1}{4} x x - \tfrac{1}{2} p - \frac{q}{2x}}$$

et

$$\sqrt{-\tfrac{1}{4} x x - \tfrac{1}{2} p + \frac{q}{2x}};$$

multipliant donc ces quatre facteurs les uns par les autres, j'ai l'équation . . . . . .

$$z^4 - 2iiz^2 - 2ikkz + i^4 = 0$$
$$-kk \quad +2ill \quad -iikk$$
$$-ll \qquad\qquad -iill$$
$$\qquad\qquad\quad +kkll$$

qui étant comparée à $z^4 + pzz + qz + r = 0$ donne les équations . . . . . ,

$$p = -2ii - kk - ll, \quad q = -2ikk + 2ill,$$
$$r = i^4 - iikk - iill + kkll$$

par lesquelles l'équation . . . . . ,

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - q^2 = 0$$
$$\qquad\qquad\quad -4r$$

se change en . . . . . .

$$x^6 - 4iix^4 + 8iikkx^2 - 4iik^4 = 0$$
$$-2kk \quad +8ill \quad +8iikkll$$
$$-2ll \quad +k^4$$
$$\qquad\quad -2kkll \quad -4iil^4$$
$$\qquad\quad +l^4$$

dont les racines sont

$$x = \pm 2i; \quad x = \pm k \pm l; \quad x = \pm k \mp l;$$

or, si on substitue présentement celle qu'on voudra de ces valeurs de x dans les quatre expressions contenues dans. . . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

ou plutôt dans . . . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx + ii + \tfrac{1}{2}kk + \tfrac{1}{2}ll \pm \frac{ill - ikk}{x}}$$

on verra qu'il en viendra également les quatre valeurs de z,

$$i+k,\quad i-k,\quad -i+l,\quad -i-l.$$

XXIX.

La méthode précédente fournit non-seulement le moyen de démontrer que les trois racines de la réduite . . . . . .

$$x^6 + 2p\,x^4 + p\,p\,x\,x - q\,q = 0,$$
$$-4r$$

donnent le même résultat par leur substitution dans l'équation $z^4 + p\,z^2 + q\,z + r = 0$; elle met de plus à portée de remarquer une vérité importante sur les équations du quatrième degré; c'est que leurs racines sont toujours ou toutes quatre réelles, ou toutes quatre imaginaires, ou bien que des quatre racines deux sont réelles, et les deux autres imaginaires. Car il n'est pas possible de faire d'autres suppositions pour les quatre racines de l'équation donnée, aussitôt qu'on est assuré, comme on vient de l'être, que ces quatre racines sont toutes exprimées à-la-fois par la formule . . . . . .

Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires.

$$\pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}x\,x - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

XXX.

En jettant les yeux sur cette valeur des racines des équations du quatrième degré, on croiroit volontiers, à cause que x est un radical quarré, que lorsque quelques-unes de ces racines sont imaginaires, elles pourront être des quantités imaginaires d'une autre nature que celles qu'on rencontre dans le second degré; c'est-à-dire, qu'au lieu d'être simplement la somme d'une quantité réelle, et de la racine d'une quantité réelle, mais négative, telle, par exemple, qu'est $a + \sqrt{-b}$, elles pourroient être des quantités composées de racines imaginaires simples, et de la racine d'autres quantités en partie réelles et en partie imaginaires, comme seroit $\sqrt{-b+\sqrt{a+\sqrt{-b}}}$: mais il est aisé de s'assurer que toutes les racines imaginaires du quatrième degré peuvent se réduire, ainsi que celles du second, à la somme de quantités réelles et de la racine de quantités réelles négatives. Car ayant vu dans les articles précédens que, lorsqu'on veut trouver la valeur de z, on peut choisir à volonté entre les valeurs de xx que donne la réduite, et remarquant d'ailleurs par la théorie des équations que cette réduite

Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second.

qui a toujours pour dernier terme ou produit des racines, une quantité qq négative, doit par conséquent avoir nécessairement une valeur de xx positive, on verra que x pourra toujours être une quantité réelle, et que, dans ce cas, lorsque $\sqrt{-\frac{1}{4}xx-\frac{1}{2}p\mp\frac{q}{2x}}$ sera imaginaire, ce ne sera autre chose que la racine d'une quantité réelle et négative.

XXXI.

Une autre remarque que peut fournir encore l'article XXVIII, c'est que toutes les fois que des quatre racines deux seront imaginaires et deux réelles, la réduite. . . . . .

$$x^6+2px^4+ppx^2-qq=0$$
$$-4r$$

sera du nombre des équations exactement résolubles par la formule de l'article VI, c'est-à-dire, qu'on arrivera alors à la solution complette de l'équation. . . . . .

$$z^4+pz^2+qz+r=0.$$

Lorsque des quatre racines deux sont réelles et deux imaginaires, on résoud exactement l'équation.

Au contraire, lorsque les quatre racines seront, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, l'équation réduite ne pourra pas se résoudre par la formule de l'article VI, et par consé-

C'est le contraire, lorsque les quatre racines sont toutes réelles ou toutes imaginaires.

quent l'on ne parviendra pas en ce cas à la solution de l'équation . . . . . .

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0.$$

Ces deux vérités se tirent de ce que la réduite

$$\begin{array}{llll} x^6 - 4iix^4 + 8iikkx^2 - 4ii\,k^4 = 0 \\ \quad -2kk & +8iill & +8iikkll \\ \quad -2ll & +k^4 & -4iil^4 \\ & -2kkll & \\ & +l^4 & \end{array}$$

est le produit des trois racines $xx - 4ii$, $xx - kk - 2kl - ll, xx - kk + 2kl - ll$; or, si une des deux quantités k ou l seulement est imaginaire, les deux racines . . . . . $xx - kk - 2kl - ll, xx - kk + 2kl - ll$ sont imaginaires, et par conséquent la réduite est alors résoluble par la formule de l'article VI.

Si, au contraire, k et l sont toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires, les trois racines $xx - 4ii, xx - kk - 2kl - ll, xx - kk + 2kl - ll$ de la réduite seront toutes trois réelles, et par conséquent la formule de l'article VI ne pourra pas les donner ; ainsi dans le quatrième degré, comme dans le troisième, les formules de la résolution ne sauroient s'appliquer qu'aux équations qui ont deux racines imaginaires.

XXXII.

Lorsqu'on aura une équation du quatrième degré à résoudre, et qu'on aura formé par son moyen la réduite . . . . . .

$$x^6 + 2px^4 + ppx^2 - qq = 0,$$
$$-4r$$

Manière de distinguer le cas de quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires.

si on trouve qu'elle échappe à la formule de l'article VI, et qu'on se propose de savoir si alors les quatre racines sont réelles, ou si elles sont toutes quatre imaginaires, on y parviendra aisément en partant des deux réflexions suivantes qui se présentent assez naturellement, lorsqu'on examine la réduite de l'article XXVIII.

1°. Dans le cas où les quatre racines sont réelles, la réduite. . . . . .

$x^6 - 4ii\,x^4 + 8iikk\,x^2 - 4\,iik^4 = 0$, ou

$$\begin{array}{lll} -2kk & +8iill & +8iikkll \\ -2ll & +k^4 & -4\,iil^4 \\ & -2kkll & \\ & +l^4 & \end{array}$$

$$x^6 - 2\times\overline{2ii+kk+ll}\times x^4 + 8ii\times\overline{kk+ll}+\overline{kk-ll}^2\times x^2 - 4ii\times\overline{kk-ll}^2 = 0$$

Condition des quatre racines réelles.

a nécessairement un second terme négatif et un 3eme terme positif, puisque $-2\times\overline{2ii+kk+ll}$

ne sauroit être ni zéro, ni positif, tant que i, k, l, sont des quantités réelles, et que

$$8ii \times \overline{kk+ll} + \overline{kk-ll}^{2}$$

ne sauroit non plus être ni zéro ni négatif dans les mêmes conditions.

2°. Si, au contraire, les quatre racines sont imaginaires; ou, ce qui revient au même, si kk et ll sont négatifs, la réduite, qui doit alors s'écrire ainsi . . . . . .

$$x^6 - 4ii x^4 - 8iikk x^2 - 4iik^4 = 0,$$
$$+2kk \quad -8iill \quad +8iikkll,$$
$$+2ll \quad +k4 \quad -4iil4$$
$$-2kkll$$
$$+l4$$

ou, ce qui revient au même . . . . . .

Conditions des quatre racines imaginaires.

$$x^6 + 2 \times \overline{kk+ll} - 2ii \times x^4$$
$$+ \overline{kk+ll} \times \overline{kk+ll} - 8ii - 4kkll$$
$$\times x^2 - 4ii \times \overline{kk-ll}^{2}$$

ne sauroit jamais avoir à la fois et le second terme négatif et le troisième positif; car, si $kk+ll$ est plus petit que $2ii$, ce qui rendroit le second terme négatif, le troisième terme, dont le coefficient est $\overline{kk+ll} \times \overline{kk+ll} - 8ii - 4kkll$, sera nécessairement négatif.

XXXIII.

L'inspection de l'équation . . . . . (1).

$$z^4 - 2iiz^2 - 2ikkz - \text{etc.}$$
$$- kk + 2ill$$
$$- ll$$

Toute équation du quatrième degré sans second terme, et qui a le troisième positif, a des racines imaginaires.

donnée dans le même article XXVIII fournit une remarque par laquelle on peut reconnoître en quelques rencontres, si une équation qui doit avoir ses quatre racines, ou toutes réelles, ou toutes imaginaires, est dans le premier de ces deux cas ou dans le second. C'est que toute équation du quatrième degré dont le second terme est évanoui, et dont le troisième est positif, doit avoir nécessairement des racines imaginaires, puisque le troisième terme de toutes ces équations représenté par $-2ii+kk+ll \times zz$, ne sauroit jamais être positif, tant que ii, kk, ll, seront positifs : c'est-à-dire, tant que les racines seront réelles. Or, dès qu'on saura qu'une équation du quatrième degré a des racines imaginaires, et qu'on aura reconnu d'ailleurs qu'elle doit avoir ses quatre racines ou toutes réelles ou toutes imaginaires, on ne sera plus embarrassé à savoir lequel de ces deux cas a lieu.

XXXIV.

Lorsqn'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont réelles, avant d'entreprendre de résoudre par approximation sa réduite pour avoir la valeur de x à substituer dans celle de z, il sera à propos d'examiner par les méthodes de la troisième partie, si quelques-unes de ces racines ne seroient pas commensurables. S'il n'y en avoit qu'une, on n'en seroit guères plus avancé pour avoir les trois autres, puisqu'alors il resteroit à résoudre une équation du troisième degré, dont les trois racines seroient réelles. Mais, si l'équation du quatrième degré avoit deux racines commensurables, elle n'offriroit plus aucune difficulté, aussitôt que ces deux racines seroient trouvées, parce qu'alors il ne resteroit plus qu'une équation du second degré à résoudre.

XXXV.

Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs commensurables dans la réduite plutôt que dans la proposée.

Lorsqu'une équation du quatrième degré a deux racines commensurables, on peut les reconnoître plus aisément par sa réduite, que par elle-même; car il est clair alors que, dans les

quatre valeurs de z, représentées généralement par $i+k, i-k, -i+l, -i-l$, i ne pourra jamais être qu'une quantité commensurable, et partant dans la racine $xx - 4ii$ de la réduite, $4ii$ représentera une quantité quarrée et commensurable : or, par cette réflexion, on peut diminuer beaucoup les tentatives nécessaires dans la méthode de la troisième partie, articles XII et XIII, puisqu'il ne faudra chercher dans les diviseurs du dernier terme qu'une quantité quarrée et prise avec le signe —.

Il en seroit de même si l'équation

$$z^4 + pzz + qz + r = 0$$

devoit se décomposer en deux équations du second degré dont les coefficiens fussent commensurables. Au lieu d'employer alors la méthode de la troisième partie, article XIX, il faudra employer celle des articles XII et XIII pour chercher les diviseurs de la réduite, et ne choisir parmi les diviseurs du dernier terme que les quantités quarrées et affectées du signe —.

XXXVI.

Lorsqu'une équation où x est au quatrième degré, a deux racines commensurables, ou qu'elle est simplement composée de deux diviseurs du second degré, on peut dire qu'elle n'est

pas véritablement du 4eme degré, et il est bien simple alors qu'elle se résolve par la méthode du second degré ; mais il y a des équations nécessairement du quatrième degré, qui se réduisent cependant à la méthode du second degré. Telles sont les équations traitées dans la quatrième partie, article XX, et les équations semblables à

$$z^4 + 2aazz - 8aabz + a^4 = 0$$
$$-4abzz \qquad -4a^3b$$

qui est le produit des deux équations . . . . .

$$zz - 2z\sqrt{ab} + aa - 2a\sqrt{ab} = 0$$

et $zz + 2z\sqrt{ab} + aa + 2a\sqrt{ab} = 0$

et qui a pour ses quatre racines. . . . . .

$$\pm\sqrt{ab} \pm \sqrt{ab - a^2 \pm 2a\sqrt{ab}},$$

dans lesquels il n'entre point d'autres radicaux que ceux du second degré.

Manière de connoître les équations du quatrième degré, dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré.

On peut distinguer aisément toutes les équations qui sont dans ce cas ; car, puisque dans ces équations la partie $\pm\frac{1}{2}x$ de l'expression

$$\pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

de la valeur de z ; ou, ce qui revient au même, la partie i commune aux quatre racines

$$i+k, \quad i-k, \quad -i+l, \quad -i-l,$$

doit être un simple radical du second degré, à cause que x ne monte qu'à des degrés pairs dans la réduite ; il faut nécessairement que, dans

toutes

toutes les équations de cette nature, la réduite soit divisible par $xx \pm$ une quantité commensurable : or, les diviseurs de cette espèce sont aisés à trouver par la méthode des articles XII et XIII de la troisième partie.

XXXVII.

Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines lorsqu'elles sont réelles.

Lorsqu'on aura reconnu que les quatre racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles, et que cette équation n'a aucun diviseur commensurable ni affecté de radicaux du second degré, on cherchera une des racines de sa réduite par la méthode d'approximation enseignée article XXI, et après l'avoir substituée à la place de x dans la formule générale. . . . . .

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}},$$

on aura les valeurs approchées des quatre racines cherchées.

XXXVIII.

Application des méthodes précédentes à un exemple.

Dans la vue d'appliquer les règles précédentes, soit prise pour exemple l'équation

$$z^4 + 3z^2 + 2z - 3 = 0.$$

En comparant cette équation à l'équation générale $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, on aura.....

$$p = 3,\ q = 2,\ r = -3.$$

Et ces valeurs étant substituées dans la réduite générale .....

$$x^6 + 2px^4 + ppxx - qq = 0,$$
$$- 4r$$

la changeront en .....

$$x^6 + 6x^4 + 21x^2 - 4 = 0.$$

Pour résoudre cette équation, soit d'abord fait $x^2 = u - 2$, afin de faire évanouir le second terme, et la réduite se changera en $u^3 + 9u - 30 = 0$; laquelle, suivant l'article XIV, est de celles qui n'ont qu'une racine de réelle, et est par conséquent dans le cas d'être résolue par la formule générale de l'article VI; d'où l'on voit que l'équation proposée aura deux racines réelles et deux imaginaires, et qu'on parviendra par conséquent à les exprimer toutes les quatre par les formules précédentes.

On auroit pu reconnoître (article XXXIII) que cette équation devoit avoir des racines imaginaires, par cela seul, que son troisième terme $2z$ avoit un coëfficient positif.

Résolvant maintenant l'équation. .....,

$$u^3 + 9u - 30 = 0,$$

par la formule de l'art. VI, on a pour sa racine réelle

$$u = \sqrt[3]{15 + 6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15 - 6\sqrt{7}}.$$

Donc $\pm\sqrt{u-2}$, ou. . . . . .

$$x = \pm\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}.$$

Si on substitue ensuite cette valeur de x dans la valeur générale . . . . . .

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}}$$

qui est dans le cas présent. . . . . .

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{3}{2} \mp \frac{1}{x}}$$

on aura pour les deux racines réelles de l'équation proposée. . . . . .

$$z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}$$
$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}$$

et pour les deux imaginaires. . . . . .

$$z = +\tfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}$$
$$\pm\sqrt{-\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} - \tfrac{1}{4}\sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{\sqrt[3]{15+6\sqrt{7}} + \sqrt[3]{15-6\sqrt{7}} - 2}}}.$$

XXXIX.

Autre exemple. Soit présentement l'équation

$$z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0,$$

en la comparant à l'équation générale, on en tirera $p = -6$, $q = 8$, $r = -1$, et partant la réduite sera $x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0$. Si on suppose $x^2 = u + 4$, afin que le second terme disparoisse, on aura $u^3 - 8u - 32 = 0$, qui, étant comparée à la formule générale de l'article VI, donnera une seule valeur réelle, laquelle sera $\sqrt[3]{16 + \frac{80}{3\sqrt{3}}} + \sqrt[3]{16 - \frac{80}{3\sqrt{3}}}$,

ou $u = \frac{2\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10} + 2\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}}{\sqrt{3}}$

qui, en se servant de la méthode de la quatrième partie, article XXXV, se réduit à

$$u = \frac{2 \times \sqrt{1+\sqrt{3}} - 2 \times \sqrt{1-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 4.$$

Substituant présentement cette valeur de u dans $x = \sqrt{u+4}$, on aura $x = \sqrt{8}$, par laquelle on changera l'équation générale.....

$$z = \pm\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}},$$

en $z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{1 \mp \sqrt{2}}$ qui donne pour les deux racines réelles de l'équation proposée $-\sqrt{2} \pm \sqrt{1+\sqrt{2}}$, et pour les deux imaginaires $+\sqrt{2} \pm \sqrt{1-\sqrt{2}}$. Ainsi l'équation proposée $z^4 - 6z^2 + 8z - 1 = 0$ est de celles qui peuvent se décomposer en deux équations du second degré, dont les coëfficiens sont incommensurables; car chacune des doubles racines précédentes sont les racines des équations.....

$$zz + 2z\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$$

et $$zz - 2z\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 0.$$

On auroit pu, sans appliquer la formule de l'article VI, et par conséquent sans avoir besoin de la méthode de la quatrième partie, article XXXV, résoudre l'équation

$$x^6 - 12x^4 + 40x^2 - 64 = 0,$$

en employant la méthode de la troisième partie, articles XII et XIII; car on auroit trouvé, par cette méthode, que cette équation avoit pour diviseur $xx - 8 = 0$.

XL.

Soit l'équation..... Troisième exemple.

$$y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0.$$

En substituant dans cette équation $z - 4$ pour y,

afin de faire évanouir le second terme, on la changera en $z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0$, qui, étant comparée à l'équation générale.....

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0,$$

donnera $p = 3$, $q = -52$, $r = 48$, et partant la réduite $x^6 + 6x^4 - 183x^2 - 2704 = 0$, de laquelle faisant évanouir le second terme par la substitution de $u - 2$ à la place de x^2, on tirera $u^3 - 195u - 2322 = 0$, qui est résoluble par la formule de l'article VI, et fait voir par conséquent que l'équation proposée est de celles qu'on peut résoudre exactement, c'est-à-dire, de celles qui ont deux racines réelles et deux racines imaginaires. Pour les trouver, soit donc employée la formule de l'article VI, à résoudre l'équation

$$u^3 - 195u - 2322 = 0,$$

on aura pour la seule valeur réelle qu'elle donne

$$u = \sqrt[3]{1161 + \sqrt{1073296}} - \sqrt[3]{-1161 + \sqrt{1073296}}$$

qui se réduit à.....

$$\sqrt[3]{1161 + 1036} - \sqrt[3]{-1161 + 1036},$$

ou à $\sqrt[3]{2197} + \sqrt[3]{125}$, ou enfin à 18; substituant présentement cette valeur de u dans.... $x = \sqrt{u - 2}$, on a $x = \sqrt{16} = 4$ qu'il ne s'a-

git plus que de substituer dans la valeur générale de

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \frac{p}{2} \mp \frac{q}{2x}};$$

on aura, par cette substitution, pour les deux racines réelles de l'équation.....

$$z^4 + 3z^2 - 52z + 48 = 0; z = 2 \pm \sqrt{-4 - \tfrac{3}{2} + \tfrac{13}{2}},$$

ou $z = 2 \pm 1$, c'est-à dire, ou 3, ou 1, et pour les deux racines imaginaires.....

$$z = -2 \pm \sqrt{-4 - \tfrac{3}{2} - \tfrac{13}{2}}, \text{ ou } z = -2 \pm \sqrt{-12}.$$

Substituant ensuite ces quatre valeurs dans $y = z - 4$, on aura pour les quatre racines de l'équation proposée.....

$$y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0;$$

$$y = -1; y = -3; y = -6 \pm \sqrt{-12}.$$

On auroit pu trouver ces racines tant par la méthode de la troisième partie, articles XII et XIII, que par celle de l'art. XXIV de la même partie, en les cherchant dans l'équation.....

$$y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0.$$

Car, par la première de ces méthodes, on auroit trouvé les diviseurs simples $y + 1$, $y + 3$, et pour quotient $yy + 12y + 48$; et la seconde

auroit donné les deux diviseurs du second degré

$$yy + 4y + 3, \text{ et } yy + 12y + 48.$$

On auroit encore pu trouver ces racines bien facilement, en cherchant les diviseurs de la réduite par le moyen de la méthode des articles XII et XIII de la troisième partie, et en ajoutant à cette méthode l'attention de ne choisir parmi les diviseurs du nombre 2704, que des nombres quarrés, et de ne les employer qu'avec le signe —. On auroit trouvé alors que la réduite a pour diviseur de cette espèce $xx - 16 = 0$, qui donne $x = 4$.

XLI.

Quatrième exemple.

Soit l'équation $z^4 + 11z^2 - 2z + 56 = 0$. En la comparant à $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, il vient $p = 11$, $q = -2$, $r = 56$; d'où la réduite est $x^6 + 22x^4 - 103x^2 - 4 = 0$, qui devient $u^3 - \frac{793}{3}u + \frac{41582}{27} = 0$, après avoir fait évanouir le second terme. Cette équation étant de celles qui échappent à la formule de l'article VI, l'équation proposée doit être, ou de celles qui ont leurs quatre racines réelles, ou de celles qui les ont toutes quatre imaginaires; mais à cause du terme positif $11z^2$, il faut (article XXXIII) qu'il y ait des racines imaginaires:

donc toutes les quatre racines le sont. On parvient ensuite à réduire ces quatre racines imaginaires à de simples racines imaginaires du second degré, en cherchant par la méthode des articles XII et XIII de la troisième partie, les diviseurs de la réduite. Car, trouvant $xx-4$ pour diviseur de cette réduite, il s'ensuit que les quatre racines de l'équation proposée sont.....

$$z=+1\pm\sqrt{-6}, \text{ et } z=-1\pm\sqrt{-7}.$$

XLII.

Soit maintenant l'équation $z^4-5z^2+4z+29=0$, qui donne, par sa comparaison avec..... Cinquième exemple.

$$z^4+pz^3+qz+r=0;$$
$$p=-5,\quad q=4,\quad r=29,$$

et par conséquent la réduite.....

$$x^6-10x^4-91x^2-16=0;$$

laquelle, en faisant $x^2=u+\frac{10}{3}$, se changera en $u^3-\frac{373}{3}u-\frac{10622}{27}=0$. Or, comme cette équation est de celles que la formule de l'article VI ne sauroit résoudre, c'est-à-dire, de celles qui ont leurs trois racines réelles, il s'ensuit que les racines cherchées de l'équation $z^4-5z^2+4z+29=0$ sont ou toutes quatre réelles, ou

toutes imaginaires. Et si on se rappelle qu'on a vu, article XXXII, que, lorsque les racines sont toutes réelles, la réduite a le second terme négatif, le troisième positif, etc. on en conclura que la proposée est dans le cas d'avoir toutes ses racines imaginaires, à cause que le troisième terme $-91x^2$ de sa réduite est négatif.

Mais, par aucune méthode connue, on ne sauroit parvenir, ainsi que dans l'exemple précédent, à donner à ces quatre racines imaginaires la forme ordinaire des racines imaginaires du second degré (*), parce que la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, la proposée ne sauroit avoir ni des diviseurs commensurables ni des diviseurs affectés de simples radicaux du second degré.

XLIII.

Sixième exemple.

Soit l'équation $z^4 - 32zz - 16z - 2 = 0$, qui donne $p = -32$, $q = -16$, $r = -2$, et par conséquent la réduite.....

$$x^6 - 64x^4 + 1032x^2 - 256 = 0.$$

(*) En quantités qu'on puisse obtenir rigoureusement.

Cette réduite ayant, comme on peut aisément s'en assurer, ses trois racines réelles, fait voir que la proposée doit avoir toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires; on s'assurera facilement par l'article XXXII, que c'est le premier de ces deux cas qui a lieu. Qu'on cherche maintenant, par la méthode des articles XII et XIII de la troisième partie, les diviseurs de cette réduite, et l'on trouvera $xx - 32$, qui, au moyen de l'expression générale.....

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}$$

donne pour les quatre racines cherchées.....

$$2\sqrt{2} + \sqrt{8 + \sqrt{2}},\ 2\sqrt{2} - \sqrt{8 + \sqrt{2}},$$

$$-2\sqrt{2} + \sqrt{8 - \sqrt{2}},\ -2\sqrt{2} - \sqrt{8 - \sqrt{2}}.$$

XLIV.

Soit présentement l'équation..... Septième exemple.

$$z^4 - 18z^2 + z + 70 = 0,$$

qui donne la réduite $x^6 - 36x^4 + 44x^2 - 1 = 0$, ou $u^3 - 388u - 2929 = 0$, en faisant évanouir le second terme par la supposition de

Or, comme cette équation a ses trois racines réelles, et que le second terme $36x^4$ est négatif, tandis que le troisième $44x^2$ est positif, il s'ensuit, par l'article XXXII, que la proposée a ses quatre racines réelles. De plus la réduite n'ayant aucun diviseur commensurable, ainsi qu'on peut s'en assurer, par la méthode des articles XII et XIII de la troisième partie, il faut se contenter de trouver par approximation les racines cherchées.

Pour cela, on commencera par employer la méthode de l'article XXI, à la résolution de l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$, et ayant trouvé 22,74 pour la valeur de u, on la substituera dans l'équation $x = \sqrt{u + 12}$, ce qui donnera 5,894 pour x; et en substituant cette valeur de x dans

$$z = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2x}}.$$

on aura pour les quatre racines cherchées.....

$$+ 3,426, + 2,468, - 2,315, - 3,579$$

qui seront fort proches des vraies : on en auroit eu de plus exactes, si on avoit poussé plus loin la méthode de l'article XXI pour résoudre l'équation $u^3 - 388u - 2929 = 0$.

XLV.

Après avoir vu dans les résolutions des équations, tant du second que du troisième et du quatrième degrés, comment, à l'aide des signes radicaux, on parvient à exprimer la valeur de l'inconnue dans ces équations, il peut venir dans l'esprit de chercher par quelle opération on retrouveroit les équations qui auroient amené une expression radicale donnée. On peut se proposer, par exemple, de savoir quelle est l'équation dont la racine seroit $x = \sqrt[3]{ab^3} + \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$, celle dans laquelle x seroit $\sqrt[3]{a^3+b^3} - \sqrt[3]{a^3-b^3}$, etc.

Pour résoudre tous les problêmes de ce genre, ou, ce qui revient au même, pour faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque, on s'y prendra de la manière suivante, qui étoit bien aisée à imaginer, après ce qui a été enseigné dans la deuxième partie, article XXXV.

Manière de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque.

On mettra à la place de chaque radical une inconnue, et l'on aura par ce moyen,

1°. Au lieu de l'équation donnée, une nou-

velle équation qui ne contiendra plus de radicaux ; 2°. autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation proposée. Or, chacune de ces équations à deux termes sera délivrée tout de suite de ses radicaux, en élevant ses deux membres à la puissance indiquée par l'exposant du signe radical que l'un de ses deux termes contiendra : donc il n'y aura plus qu'à chasser de toutes ces équations délivrées de radicaux les inconnues introduites, opération que l'on a enseignée à l'article XXXV de la seconde partie.

Exemple. Pour éclaircir ce qu'on vient de dire par un exemple, soit proposé de faire évanouir les radicaux de l'équation $x = \sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{ad^2}$. Ayant fait $\sqrt[3]{ab^2} = y$ et $\sqrt[3]{ad^2} = z$, on aura les trois équations $x = y + z$, $y^3 = ab^2$, $z^3 = ad^2$; tirant de la première $y = x - z$, et la substituant dans la seconde, il viendra. . . . . .

$$x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2,$$

de laquelle, avec le secours de l'équation $z^3 = ad^2$, il ne s'agit plus que de chasser z.

Pour cela, je commence par mettre dans la première de ces deux équations. . . . . .

$$x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - z^3 = ab^2,$$

à la place de z^3, ad^2 que donne la seconde, et elle devient $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, de laquelle je tire $z^2 = \frac{ad^2 + ab^2 - x^3 + 3x^2z}{3x}$: multipliant ensuite les deux membres de cette équation par z, et mettant à la place de z^3 sa valeur ad^2, j'ai une nouvelle équation. . . . . $ad^2 = \frac{ad^2z + ab^2z - x^3z + 3x^2zz}{3x}$, qui donne $zz = \frac{3ad^2x - ad^2z - ab^2z + x^3z}{3x^2}$.

J'égale alors ces deux valeurs de zz, et j'en tire une équation où z n'est plus qu'au premier degré, je la résous, et j'ai $z = \frac{x^4 + 2ad^2x - ab^2x}{ab^2 + ad^2 + 2x^3}$, qui étant substitué dans l'une des précédentes, par exemple, dans. . . . . $x^3 - 3x^2z + 3xz^2 - ad^2 = ab^2$, donne enfin l'équation $x^9 - 3ad^2x^6 - 3ab^2x^6 + 3a^2b^4x^3 + 3a^2d^4x^3 - 21a^2d^2b^2x^3 = a^3b^6 + 3a^3b^4d^2 + 3a^3d^4b^2 + a^3d^6$, qui ne contient d'autre inconnue que celle qui étoit dans la proposée, et qui est délivrée de toute quantité radicale. On se tireroit de la même manière de quelque équation qu'on eût.

Quelquefois les équations proposées sont
sées à délivrer des radicaux, qu'il est in
d'avoir recours à la méthode précédente, et
suffit de transposer les termes et d'élever les
membres à la puissance indiquée par le ra
qui est seul alors dans un des membres. Par e
ple, si on avoit l'équation $x=y+\sqrt[3]{a+\sqrt{\ }}$
en passant y dans le premier membre, e
vant l'un et l'autre à la troisième puissanc
aura une équation qui ne contiendra plus d'
radical que $\sqrt{a^5x}$. Mettant alors ce terme
d'un côté et élevant les deux membres au qu
on aura une équation qui ne contiendra pl
radicaux. Il en seroit de même dans beauco
rencontres.

FIN DU PREMIER VOLUME.

TAI

TABLE
DES MATIERES.

PREMIERE PARTIE.

De la méthode Algébrique d'exprimer les Problêmes par des équations, et de la résolution des équations du premier degré.

I. EXEMPLE d'un Problême semblable à ceux que les premiers Algébristes ont pu se proposer. 2
Solution de ce problême telle qu'on la pourroit trouver sans Algébre. 2
II. Méthode Algébrique d'exprimer le problême précédent. 3
Le signe + indique l'addition. 4
Le signe = marque l'égalité. 4
Une équation est l'égalité de deux quantités. 4
On résout une équation lorsqu'on trouve la valeur de l'inconnue qu'elle renferme. 4
III. Résolution de l'équation qui exprime le problême précédent. 5
Le caractère — indique la soustraction 5
IV. Autre solution du problême précédent. 6
V. Autre exemple du problême précédent. 7
VI. Troisiéme exemple du problême précédent. 8
Le signe × indique la multiplication. 8
VII. Nouveau problême de même nature que le précédent. 9
VIII. La solution analytique d'un problême a deux parties. 11
Dans la premiére on exprime ce problême par une équation. 17

Dans la seconde on résout cette équation. 11
IX. Les équations du premier degré sont celles où l'inconnue n'est multipliée ou divisée que par des quantités connues. 11
X. Les termes d'une équation sont ses parties séparées par les signes + ou —. 13
XI. Tout terme peut être passé d'un côté de l'équation à l'autre, en changeant de signe. 14
XII. On appelle membres d'une équation les deux parties séparées par le signe =. 14
XIV. Manière de faire évanouir le multiplicateur qui affecte l'inconnue. 16
XV. Manière de faire disparoître le diviseur qui affecte l'inconnue. 16
XVI. Exemple d'équation du premier degré résolue par les principes précédens. 17
XVII. Manière de faire évanouir les fractions d'une équation. 17
XVIII. Autre méthode par laquelle on les fait toutes évanouir. 18
XIX. Troisième problème. 21
On emploie une barre en Algébre comme en Arithmétique pour indiquer la division. 21
XXI. Autre solution du même problème. 24
XXII. Quatrième problème. 25
Manière dont on exprime les proportions en Algébre. 26
XXIV. Solution du problème précédent pris généralement. 29
On emploie les premières lettres de l'alphabet pour exprimer ce que l'on connoît, et les dernières pour ce qu'on ne connoît pas. 30
Les lettres qui se suivent sans aucun signe entr'elles, sont censées se multiplier. 30
XXV. Application de la solution précédente à des nombres. 36
Autre application. 36
XXVI. Cinquième problème. 37
XVII. Exemples en nombres. 39
Autre exemple. 39
XXIX. Les règles des articles X et suivans suffisent pour les équations littérales. 41
L'application de ces règles a donné naissance à plusieurs opérations de l'Algébre. 41

Premier exemple de résolution d'équations littérales. 41
XXX. Deuxième exemple de résolution d'équations littérales. 42
XXXI. Réduction des quantités à leur plus simple expression. 42
On appelle termes positifs, ceux qui sont précédés de +; négatifs, ceux qui sont précédés de −. 43
XXXII. L'addition algébrique est la même opération que la précédente. 44
XXXIII. Comment l'on peut dire que l'on ajoute une quantité négative. 45
XXXIV. On tire encore de l'opération précédente la soustraction algébrique. 46
Procédé de la soustraction. 47
XXXV. On augmente une quantité lorsqu'on en soustrait une quantité négative. 48
XXXVI. Troisième exemple de résolution d'équations littérales. 49
XXXVII. Un chiffre placé au-dessus et à droite d'une lettre, désigne ce qu'elle auroit été répétée de fois par la multiplication. 50
Et dans ce cas la lettre est dite élevée à la puissance exprimée par ce chiffre qu'on appelle exposant. 51
Les chiffres qui sont à gauche sur la même ligne, sont nommés coëfficiens. 51
XXXVIII. Quatrième exemple de résolution d'équations littérales. 51
XXXIX. Les quantités incomplexes sont celles qui n'ont qu'un terme. 53
Multiplication des quantités incomplexes, tirée des deux exemples précédens. 53
XL. Cinquième exemple de résolution d'équations littérales. 53
XLI. Division des quantités incomplexes, tirée de cet exemple. 55
XLII. Sixième exemple de résolution d'équations littérales. 56
Usage des barres au-dessus des quantités, le même que celui des parenthèses. 57
XLIII. Multiplicatio des quantités complexes ou polynomes tirée de l'article précédent. 58

Exemple de multiplication de polynomes. 59
XLIV. Principe fondamental des multiplications. 61
XLV. Méthode qu'il faut suivre dans la multiplication. 61
XLVI. Application de la méthode précédente à un exemple. 62
XLVII. Sixième exemple de résolution d'équations littérales. 65
Manière de faire la division indiquée dans cet exemple. 65
XLVIII. Méthode générale pour les divisions des quantités complexes. 66
Manière d'éviter tout tâtonnement dans la division. 68
Ce que c'est qu'ordonner une quantité par rapport à une lettre. 68
XLIX. Application de la méthode précédente à un exemple. 69
L. Autre exemple. 72
LI. Attention qu'il faut avoir en ordonnant, lorsqu'il y a plusieurs lettres. 73
LII. Problême dans lequel on emploie deux inconnues. 74
LIV. Application de la solution précédente à un exemple. 80
LVI. Autre problême où l'on emploie deux inconnues. 81
LVII. Exemple du problême précédent en nombres. 84
LVIII. Autre exemple. 85
Singularité des expressions où l'on arrive dans cet exemple. 85
Manière de reconnoître ce qu'elles peuvent signifier. 86
LIX. Théorêmes généraux concernant les signes des quotiens ou des produits. 86
LX. On démontre que $-b$ par $-d$ est $+bd$, quoique ces quantités ne soient précédées de rien. 87
LXI. Les autres cas se démontrent de même. 88
LXII. Comment la valeur négative qu'on a trouvée résout le problême. 88
LXIII. Les inconnues devenant négatives, doivent être prises dans un sens différent de celui de l'énoncé du problême. 90
Il en est de même des connues. 90
LXIV. Exemple de l'usage des quantités connues faites négatives. 90
LXV. Autre exemple du même usage des quantités connues faites négatives. 92
LXVI. Deux équations du premier degré à deux inconnues, peuvent toujours être rapportées aux précédentes. 93

Exemple. 94
LXVII. Autre exemple. 95
LXVIII. Autre manière de résoudre le même exemple. 99
LXIX. Comparaison de deux solutions précédentes. 100
LXXI. Méthode générale de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres. 104
LXXIII. Méthode générale pour trouver le plus grand commun diviseur des quantités Algébriques. 108
LXXIV. Premier exemple. 109
LXXV. Second exemple. 111
LXXVI. Troisième exemple. 112
LXXVII. Autre manière de résoudre le même exemple. 114
LXXVIII. Autres quantités dont on trouve le plus grand commun diviseur, sans la méthode précédente. 114
LXXIX. Lorsqu'il y a trois inconnues dans un problême, il faut trois équations pour le résoudre. 115
Comment on dégage les inconnues de ces équations. 116
LXXX. Problême dans lequel on emploie trois inconnues. 116
LXXXI. Manière d'abréger les calculs par des dénominations particulières. 119
LXXXII. Exemple du problême précédent en nombres. 120
LXXXIII. Tous les problêmes du premier degré à trois inconnues peuvent, étant mis en équations, être compris dans le précédent. 121

SECONDE PARTIE.

De la résolution des équations du second degré.

I. Problême qui contient dans sa généralité des problêmes de tous les degrés. 125
II. Equation du problême précédent pour le second degré. 127
III. Pour le troisième degré. 128
IV. Pour le degré *n*. 129
V. Manière d'arriver à la solution générale des équations du second degré. 129
Le signe √ indique la racine quarrée. 131

VI. La racine quarrée d'une quantité est aussi bien négative que positive. 131

Une équation du second degré a deux racines, c'est-à-dire, deux valeurs d'x. 132

VII. Formule contenant ces deux racines. 132

VIII. Application de la formule précédente à l'équation de l'article II. 132

IX. Réduction de la valeur d'x en formant la racine du produit par celles des produisans. 133

X. Exemple de ce problème. 134

XI. Autre exemple. 136

XII. Troisième exemple qui, demandant la racine d'une quantité négative, est impossible. 136

Ces racines sont dites imaginaires. 137

XIII. Quelles sont les équations du second degré, dont les racines sont imaginaires. 137

XIV. Résolution des équations du second degré, sans les comparer à la formule générale. 137

XV. Autre problème du second degré. 138

XVI. Des deux valeurs précédentes, l'une est nécessairement positive, l'autre négative. 141

XVII. Usage de la valeur négative. 142

XX. Nouveaux exemples de résolutions d'équations du second degré. 145

XXI. Procédé de l'extraction de la racine quarrée expliqué sur un exemple. 149

XXII. Autres exemples d'extractions de racines quarrées. 150

XXIII. Exemples de réductions de quantités radicales. 152

XXIV. Les quantités qui n'ont point de racines exactes, sont dites incommensurables ou irrationelles. 152

L'addition et la soustraction de ces quantités ne supposent que leur réduction. 152

XXV. Multiplication des incommensurables. 153

XXVI. Division des incommensurables. 155

XXVII. Problème du second degré demandant plusieurs inconnues. 156

XXVIII. Autre manière de résoudre les équations précédentes. 159

XXIX. Exemple d'équation du second degré à deux inconnues, plus compliqué que le précédent. 160
Équation finale à laquelle conduisent ces équations. 161
XXX. Autre manière de traiter le même exemple. 162
XXXII. y étant à un degré quelconque, et x seulement au second degré, on traiteroit de même les deux équations. 164
XXXIII. Ce qu'il faudroit pour arriver à l'équation finale, lorsque x seroit au troisième degré. 165
XXXIV. Ce seroit la même chose, si x montoit à des degrés plus élevés. 167
XXXV. Et s'il y avoit plus de deux inconnues, on parviendroit de même à l'équation finale. 167

TROISIÈME PARTIE.

Où l'on donne quelques principes généraux pour les équations de tous les degrés, avec la méthode de tirer de ces équations celles du premier et du second degré qu'elles peuvent renfermer.

I. Manière de former une équation par le moyen de ces racines. 170
II. Une équation a autant de racines que de degrés. 171
III. Propriété des équations de tous les degrés. 172
IV. Dans une équation sans second terme, la somme des racines positives est égale à celle des négatives. 173
V. Une équation qui n'a point de terme connu, a au moins une racine égale à zéro. 174
VI. Conditions qu'il faut observer dans une équation, pour y trouver les propriétés précédentes. 174
VII. Méthode pour avoir les racines commensurables d'une équation. 175
VIII. Dans une équation dont tous les coefficiens sont entiers, l'inconnue ne sauroit être une fraction. 176
IX. Transformation par laquelle on fait évanouir les fractions d'une équation quelconque. 178
X. Par cette transformation la méthode précédente s'applique aux équations fractionnaires. 179

XI. Inconvénient de la méthode précédente. 179
XII. Réflexions qui ont servi à perfectionner cette méthode. 180
XIII. Principe fondamental pour trouver les racines commensurables. 181
XIV. Application de la méthode précédente à un exemple. 182
XVI. Manière d'avoir tous les diviseurs d'un nombre. 187
XVII. Autre exemple de la méthode de trouver les racines commensurables. 188
XVIII. Troisiéme appplication de la méthode de trouver les racines commensurables. 191
XIX. Méthode pour trouver des équations du second degré commensurables dans une équation donnée. 193
XX. Application de la méthode précédente. 196
XXI. Autre application de la méthode précédente. 201
XXII. Méthode pour trouver les diviseurs du premier degré, lorsque l'x doit avoir un coefficient. 204
XXIII. Application de cette méthode à un exemple. 206
XXIV. Méthode pour trouver les diviseurs dn second degré, lorsque l'x doit avoir un coefficient. 208
XXV. Application de cette méthode à un exemple. 209
XXVI. Toute quantité donnée qui ne monte pas au sixième degré et qui a des diviseurs, en doit avoir d'un degré moins élevé que le troisième. 211
XXVII. Si la quantité monte au sixième degré ou au-delà, elle pourroit n'avoir de diviseurs que du troisième ou du quatrième. 211
XXIX. Méthode pour trouver tous les diviseurs à deux lettres dans une quantité qui en a trois. 213
XXX. Exemple. 214
XXIX. Autre exemple. 215
XXXII. Méthode pour trouver les diviseurs de trois lettres et du premier degré. 216
XXXIII. Application de la méthode précédente à un exemple. 218
XXXIV. Autre exemple. 219
XXXV. Troisième exemple où l'on trouve les diviseurs à deux lettres en même-tems que ceux à trois. 220
XXXVI. Méthode pour trouver les diviseurs du second degré et à trois lettres. 224

XXXVII. Application de cette méthode à un exemple. 225
XXXVIII. Autre exemple. 228
Application de la méthode donnée, article XIV, pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, aux quantités littérales. 229
XL. Ce qu'il faut faire pour trouver les diviseurs des quantités qui ne sont pas homogènes. 234
XLI. Cas où le diviseur se trouve plus facilement que par les méthodes précédentes. 235

QUATRIÈME PARTIE.

Résolution des équations de degrés quelconques, lorsqu'elles n'ont que deux termes, ou lorsqu'en ayant trois, elles peuvent se réduire à celles qui n'en ont que deux, par la méthode des équations du second degré, avec différentes opérations nécessaires pour ces équations, comme l'extraction des racines, la réduction des quantités radicales, etc.

I. Des équations du troisième degré à deux termes. 237
On met 3 sur le caractère $\surd$, pour exprimer la racine cube. 237
II. Les radicaux cubes ne peuvent avoir qu'un signe à la fois. 237
IV. Comment on multiplie les radicaux cubes. 240
V. Racines de l'équation du troisième degré à deux termes. 240
VI. Des équations à deux termes d'un degré quelconque. 240
Ces équations ne sauroient jamais avoir plus de deux racines réelles. 241
VII. Réflexions sur l'élévation des puissances. 242
VIII. Application des réflexions précédentes à l'extraction des racines. 244
IX. De l'extraction des racines, lorsqu'on a des puissances incomplètes. 245
XI. En quoi consiste le cube d'un binome. 247
XII. Méthode qu'il faut suivre pour prendre la racine cube des quantités complexes. 247

XIII. Premier exemple. 248
XIV. Second exemple. 249
XV. Additions et soustractions des quantités radicales de toute espèce. 251
XVI. Multiplication et division des quantités radicales qui ont les mêmes exposans. 251
Exemples. 252
XVII. Pour faire ces opérations sur les quantités radicales de différens exposans, il faut les réduire au même exposant. 252
Méthode pour cette réduction. 253
XVIII. Autre manière de faire les opérations précédentes. 254
XIX. Ce que c'est qu'une puissance fractionnaire. 260
Ce que c'est qu'une puissance négative. 260
Ce que c'est que la puissance o. 261
XX. Des équations à trois termes qui se résolvent par la méthode du second degré. 263
XXI. Exemple de la méthode précédente. 264
XXII. Autre exemple. 265
XXIII. Troisième exemple. 265
XXIV. Quatrième exemple. 266
XXV. Méthode pour trouver les racines quarrées des quantités en partie commensurables et en partie radicales. 267
XXVII. Application de la méthode précédente à un exemple. 271
XXVIII. Autre exemple. 271
XXX. Troisième exemple. 272
XXXI. Méthode pour trouver la racine cube des quantités en partie commensurables, et en partie incommensurables. 275
XXXII. Application de la méthode précédente à un exemple. 278
XXXIII. Autre exemple. 279
XXXV. Méthode pour trouver les racines des quantités numériques en partie commensurables, etc. 282
XXXVI. Application de la méthode précédente à un exemple. 285
XXXVII. Autre exemple. 285

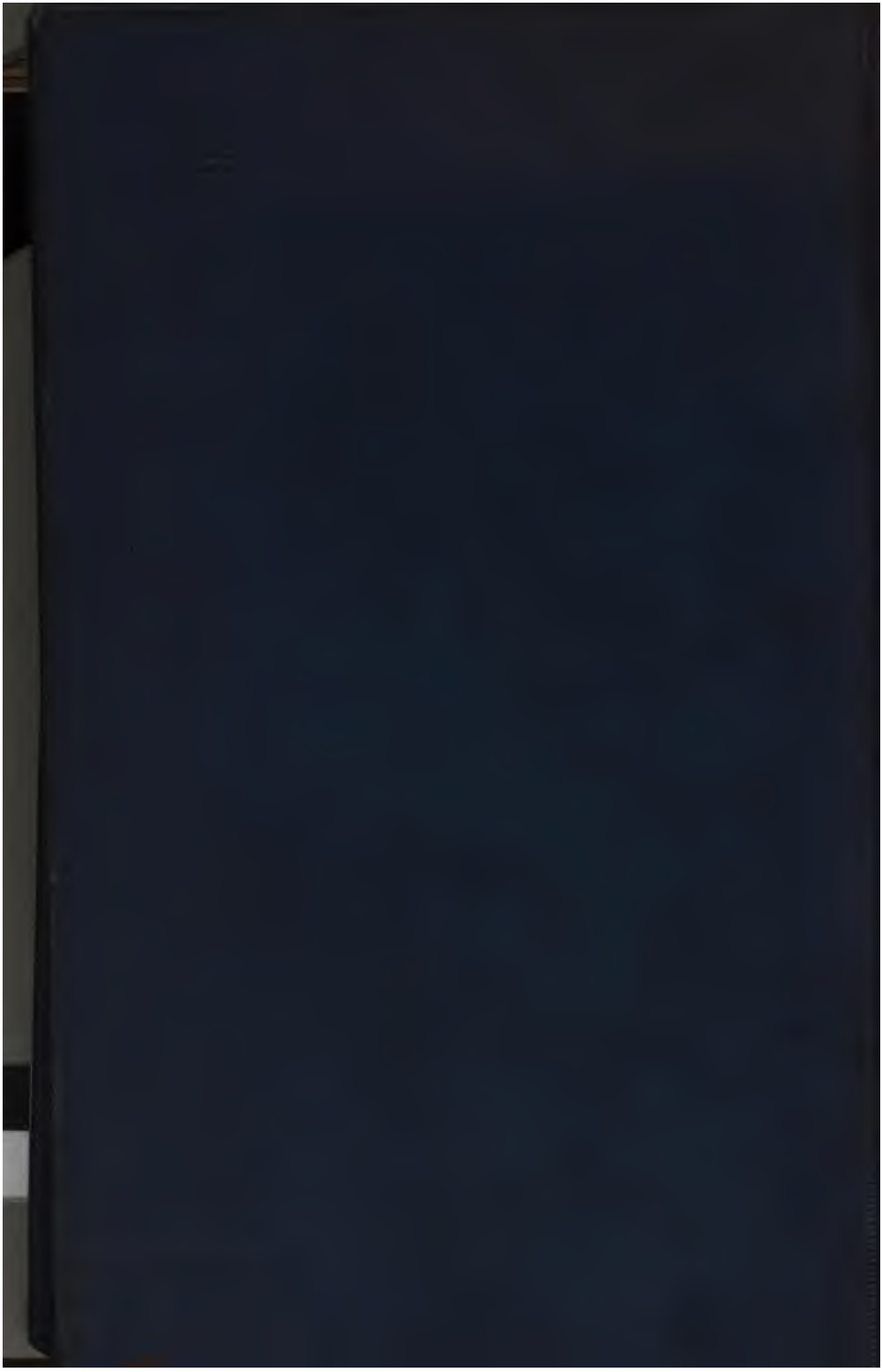
XXXVIII. Simplification de la méthode précédente. 287
XXXIX. Application de la nouvelle méthode. 287
XL. Cette nouvelle méthode pourroit être fautive dans les cas où *A* et *B* sont de signes différens 288
Ce qu'il faut faire en ce cas. 289
XLI. Cas où la méthode précédente pourroit induire en erreur. 292
Moyen de s'en garantir. 293
XLIII. Ce qu'il faut faire quand la racine cube doit être la somme de deux radicaux. 295
XLIV. Comment on prend la racine quatrième des quantités de même espèce que les précédentes. 295
XLV. Ce qu'il faut faire toutes les fois que l'exposant de la racine est pair. 296
XLVI. Pour les racines cinquièmes. 296
XLVII. Pour les racines de tous les degrés. 297
XLVIII. De la manière d'élever un binome à une puissance quelconque. 298
Formule générale pour l'élévation de $p+q$ à la puissance m. 304
L. Démonstration du théorême de l'article XLVII. 305
LI. Application de la formule précédente à un exemple. 306
LII. Comment on applique la formule précédente aux quantités de plus de deux termes. 307
LIII. Exemple. 308
LIV. L'on fait voir que la formule précédente a lieu encore, lorsque l'exposant est fractionnaire. 310
LV. La même formule va encore aux puissances négatives. 312
LVI. Exemple d'une racine quarrée prise par la formule de l'élévation des puissances. 314
LVII. Lorsque les quantités n'ont point de racines exactes, on en trouve d'approchées par la méthode précédente. 316
Exemple. 316
Ce que c'est qu'une série ou suite infinie. 317
LVIII. Toutes sortes de quantités peuvent être réduites en séries par la formule précédente. 318

CINQUIEME PARTIE.

Résolution des équations du troisième et du quatrième degré.

I. Equation du troisième degré la plus composée. 321
II. Transformation par laquelle on fait évanouir un terme quelconque de cette équation. 321
III. Transformation précédente appliquée à une équation du quatrième degré. 324
Ce n'est ordinairement que le second terme qu'on fait évanouir. 324
IV. Evanouissement du second terme dans une équation du cinquième degré. 325
V. Dans une équation d'' degré quelconque m, 325
VI. Résolution de l'équation générale $x^3 + px + q = 0$. 325
VII. La formule précédente ne donne qu'une des trois racines. 328
Manière d'avoir les deux autres. 328
VIII. Cas où la formule précédente ne sauroit faire connoître x, à cause des imaginaires qu'elle renferme. 330
IX. On démontre cependant que dans ce cas x est réel. 331
X. Par la même méthode on a une valeur approchée de x. 332
XI. Les deux autres valeurs de x sont aussi réelles dans le même cas: 333
XII. Comment des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$, on tire celles de l'équation $y^3 + dy^2 + ey + f = 0$. 335
XIII. Une équation du troisième degré a ses trois racines réelles, ou une réelle avec deux imaginaires. 335
XIV. Quelles sont les racines lorsque $\frac{1}{27} p^3$ est négatif et $= \frac{1}{4} qq$. 336
XVI. Application des méthodes précédentes à un exemple. 337
XVII. Autre exemple contenant une équation du sixième degré qui se réduit au troisième. 338
Equations plus élevées qui s'y réduiroient aussi. 339
XIX. Quatrième exemple dans lequel la formule de l'article VI est insuffisante. 341

Application de la méthode de l'art. X, ponr approcher des racines. 341
Cas irréductible du troisième degré. 343
XX. Inconvénient de l'approximation enseignée art. X. 344
XXI. Autre méthode d'approximation générale et facile dans la pratique. 344
La méthode qu'on vient d'enseigner donne d'abord x à un millième près. 347
XXII. Manière de rendre l'approximation beaucoup plus exacte. 347
XXIII. Application de cette méthode à un exemple. 349
XXIV. Autre exemple. 349
XXV. Résolution de l'équation générale du quatrième degré. 350
La résolution d'une équation du quatrième degré dépend d'une équation du troisième. 352
Cette équation s'appelle *la réduite*. 352
XXVI. Dans le quatrième degré on peut exprimer les quatre racines par une seule formule. 353
XXVII. On arrive aux mêmes racines d'une équation du quatrième degré, quelle que soit celle des racines de la réduite qu'on ait prise. 356
XXIX. Les racines d'une équation du quatrième degré sont toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles et deux imaginaires. 359
XXX. Les racines imaginaires du quatrième degré sont de même nature que celles du second. 360
XXXI. Lorsque, des quatre racines, deux sont réelles et deux imaginaires, on résout exactement l'équation. 361
C'est le contraire lorsque les quatre racines sont toutes reelles ou toutes imaginaires. 361
XXXII. Manière de distinguer les cas des quatre racines réelles de celui des quatre imaginaires. 363
Conditions des quatre racines réelles. 363
Conditions des quatre racines imaginaires. 364
XXXIII. Toute équation du quatrième degré sans second terme, et qui a le troisième positif, a des racines imaginaires. 365
XXXV. Avantage qu'on trouve à chercher les diviseurs com-

mensurables dans la réduite, plutôt que dans la proposée. 366
XXXVI. Manière de connoître les équations du quatrième degré, dont les racines n'ont point d'autres radicaux que ceux du second degré. 368
XXXVII. Ce qu'il faut faire pour avoir les valeurs approchées des quatre racines, lorsqu'elles sont réelles. 369
XXXVIII. Application des méthodes précédentes à un exemple. 369
XXXIX Autre exemple. 372
XL. Troisième exemple. 373
XLI. Quatrième exemple. 376
XLII. Cinquième exemple. 377
XLIV. Sixième exemple. 378
XLV. Septième exemple. 379
XLVI. Manière de faire évanouir les radicaux d'une équation quelconque. 381
Exemple. 382

Fin de la Table.